**ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

 **Γ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΘΕΜΑ Α**

Α1. Σχολ. Σελ. 142

Α2. Σχολ. Σελ. 129

Α3. 1. Σ 2. Σ 3. Λ 4. Λ 5. Σ

**ΘΕΜΑ Β**

**Β.1** η f είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

 f’(x)=-= γιατί 0<x<e⬄lnx<lne=1⬄1-lnx>0

άρα f γνησίως αύξουσα στο (0,e)

**Β.2** η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο (0,e) , άρα το σύνολο τιμών της είναι το f(A)=()

Είναι

 =

 1-lnx=u

 u0==+∞

=-∞

•=

1-lnx=t

t0==0

=+∞

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι το f(A)=R

**Β.3** για κάθε xϵ(0,e) ειναι : 1-lnx= ⬄ ln(1-lnx)=-α ⬄ f(x)=α.

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο (0,e) και το σύνολο τιμών της είναι το R .

Άρα για κάθε αϵR, η εξίσωση f(x)=α , έχει μοναδική λύση.

**Β.4** για κάθε xϵ(0,e) f’’(x)=…=

f’’(x)=0⬄x=1

f’’(x)>0⬄x>1

f’’(x)<0⬄x<1

Έχουμε

• η f’ συνεχής στο (0,1] και f’’(x)<0 στο (0,1), άρα η f’ είναι γνησίως φθίνουσα στο (0,1]

• η f’ συνεχής στο [1,e) και f’’(x)>0 στο (1,e), άρα η f’ είναι γνησίως αύξουσα στο [1,e)

• η f’ παρουσιάζει ελάχιστο στο χ0=1 , με ελάχιστη τιμή f’(1)=1.

Άρα ο ρυθμός μεταβολής της f γίνεται ελάχιστος, όταν χ=1.

**ΘΕΜΑ Γ**

**Γ1.** Είναι **=k**ϵR (1) , οπότε η αρχική σχέση ισοδύναμα γράφεται :

x2f’(x)+1=4k-xf(x)⬄x2f’(x)+xf(x)=4k-1⬄xf’(x)+f(x)=(4k-1) ⬄

(xf(x))’=((4k-1)lnx)’ ⬄ **xf(x)=(4k-1)lnx+c** ,(2) για κάθε x>0

Για x=1 στην σχέση (2) , έχουμε : f(1)=0+c ⬄ c=0

Οπότε έχουμε **f(x)=** ,(3) x>0

Από (1) και (3) , έχουμε :

=k ⬄ (4k-1)=k ⬄ (4k-1)=k ⬄

(4k-1)=k ⬄ … ⬄ (4k-1)=k⬄ 4k-1=2k ⬄ k= .

**Γ2.** Από την σχέση (3) έχουμε f(x)= , x>0

**Γ3.** για κάθε x>0 έχουμε: f(x)≤x-1 ⬄ ≤x-1 ⬄ lnx≤x2-x ⬄ lnx-x2+x≤0 ⬄

h(x)≤0 , όπου h(x)= lnx-x2+x , x>0

h’(x)= , x>0

h’(x)=0⬄…⬄x=1 , x>0

h’(x)>0⬄…⬄x<1 , x>0

h’(x)<0⬄…⬄x>1 , x>0

• η συνάρτηση h είναι συνεχής στο (0,1] και h’(x)>0 στο (0,1) , οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα στο (0,1]

• η συνάρτηση h είναι συνεχής στο [1,+∞) και h’(x)<0 στο (1,+∞) , οπότε η h είναι γνησίως φθίνουσα στο [1,+∞)

• η συνάρτηση h παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο χ=1 με μέγιστη τιμή h(1)=0.

Οπότε είναι h(x)≤h(1) , x>0 ⬄ h(x)≤0 , x>0

**Γ4.** f’(x)= , x>0

g’(x)=-2x , xϵR

οι γραφικές παραστάσεις Cf, Cg έχουν κοινή εφαπτομένη μόνο όταν υπάρχει α>0 και βϵR, ώστε η εφαπτομένη της Cf στο σημείο Α(α,f(α)) να ταυτίζεται με την εφαπτομένη της Cg στο Β(β, g(β)).

 ε1 : y-f(α)=f’(α)(x-α)⬄ ε1: y=f’(α)x+f(α)-αf’(α)

ε2 : y-g(β)=g’(β)(x-β)⬄ ε2 : y=g’(β)x+g(β)-βg’(β)

οπότε πρέπει : ⬄…⬄

φ(α)= , α>0

η συνάρτηση φ ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρ. Bolzano στο [1,e] , αφού είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και

φ(1)φ(e)=…=-5/4<0

επομένως θα υπάρχει ένα τουλάχιστον ρϵ(1,e) τέτοιο ώστε φ(ρ)=0 , δηλαδή η εξίσωση εχει τουλάχιστον μια λύση.

Αρα το σύστημα εχει μια τουλάχιστον λύση την

α=ρ και β=(lnp-1)/(2p2) , pϵ(1,e)

άρα οι Cf,Cg εχουν μια τουλάχιστον κοινή εφαπτομένη.

**ΘΕΜΑ Δ**

**Δ1.**

Για x το -1→

Άρα,

**Δ2.** Η εξίσωση είναι:

Η συνεχής στο ,



σ/χης

D LH

()

σ/χης

Το υπάρχει

Το υπάρχει

Τα μοναδικά λόγω μονοτονίας στα επιμέρους διαστήματα.

**Δ3.** Η είναι συνεχής στα [, -1] , [-1 , ]

 Από Δ1

Η είναι παραγωγίσιμη στα (, -1) , (-1 , )

(Δ2)

Επομένως, ισχύει Θ.Μ.Τ. άρα υπάρχει (, -1) :

 (Ι)

Υπάρχει () :

 (ΙΙ)

Από (Ι),(ΙΙ)

Προφανώς αφού ανήκουν σε ξένα διαστήματα.

**Δ4.** Είναι , αφού

Θέτω ,

((.

Από κριτήριο παρεμβολής

, από Δ1 ενώ

Άρα, - .

 Έτσι, L= -

 **ΠΑΝΑΓΟΥ ΓΙΩΡΓΟΣ (Ακαδημαϊκός Υπεύθυνος)**

**ΣΠΥΡΟΠΟΥΛΟΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ (Διακρότημα Πειραιάς -Μοσχάτο - Διακρότημα@Home)**