ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

1.1. Προτεινόμενα Διαγωνίσματα

1.2. Θέματα Πανελλαδικών Εξετάσεων

1.1. Προτεινόμενα Διαγωνίσματα

1ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται «1-1» σε ένα σύνολο Α;

Μονάδες 4

Α2. Αν $c>0$, τότε ποιο εμβαδόν εκφράζει το $\int_{\alpha}^{\beta} c\,dx$ ($\alpha<\beta$);

Μονάδες 4

Α3. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, να αποδείξετε ότι και η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0).$$

Μονάδες 7

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

β. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha)<0$ και υπάρχει $\xi\in(\alpha, \beta)$, ώστε $f(\xi)=0$, τότε κατ΄ ανάγκη $f(\beta)>0$.

γ. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και δεν είναι αντιστρέψιμη, τότε υπάρχει κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, στο οποίο η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle.

δ. Αν μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα σύνολο A είναι συνεχής στο A και $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του A, τότε η f είναι πάντα σταθερή σε όλο το σύνολο A.

ε. Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε ισχύει:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx+\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx=0$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(x) = 2\ln\frac{x+1}{1-x} + 3$$

Β1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

Μονάδες 4

Β2. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 4

Β3. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να μελετήσετε την f^{-1} ως προς τη συνέχεια στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 7

Β4. Να βρείτε τα όρια: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x^2+1}(x-1)}{\ln|x|}, & \text{αν } x \neq 0,\ x \neq 1 \text{ και } x \neq -1 \\ \kappa, & \text{αν } x = 1 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases},$$

και $g(x) = f(x)\ln\left(\dfrac{1}{x^2}\right),\ x > 0$.

Γ1. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ καθώς και την τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $\mathbb{R} - \{-1\}$.

Μονάδες 6

Γ2. α. Να μελετήσετε την συνάρτηση g ως προς την μονοτονία της.

Μονάδες 4

β. Να αποδείξετε ότι:

$$e^{-x^2+1} \le \frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2\left(x-1\right)} \text{ , αν } x>1 \text{ και}$$

$$e^{-x^2+1} \ge \frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2\left(x-1\right)} \text{ , αν } 0<x<1$$

Μονάδες 4

Γ3. α. Να μελετήσετε την συνάρτηση g ως προς τα κοίλα της στο διάστημα $\left(0,\ +\infty\right)$ και να βρείτε τα σημεία καμπής της.

Μονάδες 5

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της g στα σημεία $A\left(2,\ g(2)\right)$ και $B\left(1,\ g(1)\right)$ αντίστοιχα και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι:

$$e^{-4}\left(7-3x\right) \le e^{-x^2}\left(x-1\right), \text{ για κάθε } x \in \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2},\ +\infty\right) \text{ και}$$

$$e^{-x^2} \ge e^{-1}, \text{ για κάθε } x \in \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2},\ 1\right).$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f{:}A \to \mathbb{R},\ A=\left(0,+\infty\right)$ με σύνολο τιμών $f\left(A\right)=\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε: $e^{f(x)}\left(f^2(x)-2f(x)+3\right)=x$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f.

Μονάδες 6

Για τα ερωτήματα Δ2 και Δ3 δίνεται ότι: $f^{-1}\left(x\right)=e^{x}\left(x^2-2x+3\right),\ x\in\mathbb{R}$.

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f^{-1} ως προς την κυρτότητα. Στη συνέχεια, να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1}, την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f^{-1} στο σημείο που αυτή τέμνει τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $x=1$.

Μονάδες 8

Δ3. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θεωρούμε τα σημεία $A\left(x, f^{-1}(x)\right), B\left(f^{-1}(x), x\right)$ των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f^{-1} και f αντίστοιχα.

α. Να αποδείξετε ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης των εφαπτομένων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f^{-1} και f στα σημεία A και B αντίστοιχα, είναι ίσο με 1.

Μονάδες 6

β. Να βρείτε για ποια τιμή του $x \in \mathbb{R}$ η απόσταση των σημείων A , B γίνεται ελάχιστη, και να βρείτε την ελάχιστη απόστασή του.

Μονάδες 5

2ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα μίας συνάρτησης f στο διάστημα Δ ;

Μονάδες 5

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat και να το αποδείξετε.

Μονάδες 10

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμαπου αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη της C_f σε κάθε σημείο είναι «κάτω» από τη C_f εκτός από το κοινό τους σημείο.

β. Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και α , β , γ $\in$ Δ , τότε ισχύει:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\gamma f(x)dx + \int_\beta^\gamma f(x)dx$$

γ. Αν υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ τα όρια των συναρτήσεων f και g , τότε ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)},\ \text{εφόσον}\ \lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$$

δ. Αν το $(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f και η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση στο x_0 , τότε $f''(x_0) = 0$.

ε. Αν f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε:

$$\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx = \left[f(x)g(x)\right]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f'(x)g(x)dx$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f με: $f(x)=4\sqrt{e^x-2}+3$ και $g(x)=\frac{1}{x^2}+2$

Β1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

Μονάδες 4

Β2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f καθώς και το πλήθος των ριζών της.

Μονάδες 6

Β3. Να ορίσετε την f^{-1}.

Μονάδες 5

Β4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g δεν είναι αντιστρέψιμη .

Μονάδες 4

Β5. Να ορίσετε τη συνάρτηση fog.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=(x^2+1)\cdot \ln x,\ x>0$.

Γ1. Να δείξετε ότι: $2x\ln x+\frac{1}{x}>0$, για κάθε $x>0$.

Μονάδες 5

Γ2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x)=0$$

Μονάδες 5

Γ3. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in\left(\frac{1}{e},\ 1\right)$ τέτοιο, ώστε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ να είναι σημείο καμπής της C_f.

Μονάδες 6

Γ4. α. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

Μονάδες 4

β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες: $x=\frac{1}{e}$, $x=e$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με:

$$f'(0) = f(0) = 0,$$

η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$e^x\left(f'(x) + f''(x) - 1\right) = f'(x) + xf''(x), \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \ln\left(e^x - x\right)$, $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 5

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής

Μονάδες 5

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\ln\left(e^x - x\right) = \sigma\upsilon\nu x$$

έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Μονάδες 5

Δ5. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^1 \left(e^x - 1\right)\frac{f(x)}{e^x - x}dx$$

Μονάδες 4

3ο Δ Ι Α Γ Ω Ν Ι Σ Μ Α

ΘΕΜΑ Α

Α1. Τι ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του $y = f(x)$ ως προς το x στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της f ;

Μονάδες 5

Α2. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

Μονάδες 10

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) ελάχιστο, το $f(x_0)$, όταν $f(x) < f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.

β. Ανάμεσα σε δύο ρίζες μιας πολυωνυμικής συνάρτησης υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα της παραγώγου της.

γ. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και $\alpha, \beta \in \Delta$, τότε ισχύει:

$$\int_{\beta}^{x} f(t)dt = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt + c,\ c \in \mathbb{R}$$

δ. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής:

$$(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$$

και l ένας πραγματικός αριθμός. Τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} (f(x)\text{-}l) = 0$$

ε. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή είναι θετική για κάθε $x \in \Delta$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(x) = \ln\left(3e^x + 1\right) - 2$$

Β1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

Μονάδες 5

Β2. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

Μονάδες 5

Β3. Να ορίσετε την f^{-1} .

Μονάδες 8

Β4. Να λύσετε την ανίσωση:

$$f\left(x\right) < f^{-1}\left(\ln 5 - 2\right) - 2 .$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται συνάρτηση:

$$f(x) = e^x - \ln\left(x + 1\right) - 1$$

Γ1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 5

Γ2. α. Να βρείτε το σύνολο τιμών της και να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

β. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

Μονάδες 10

Γ3. Αν για τους αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $2\alpha + \beta > 0$ και $\alpha + 2\beta - 1 > 0$, ισχύει:

$$e^{2\alpha+\beta-1} - \ln\left(2\alpha + \beta\right) + e^{\alpha+2\beta-2} - \ln\left(\alpha + 2\beta - 1\right) \le 2 ,$$

να υπολογίσετε τους α, β .

Μονάδες 5

Γ4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και την ευθεία $x = 1$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $(1, +\infty)$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x > 1$ που ικανοποιεί τη σχέση:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1 + x\ln x}{x\ln x}, \text{ για κάθε } x > 1 \text{ με } f(e) = e^e$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι: $f(x) = e^x \cdot \ln x,\ x > 1$ καθώς και ότι οι συναρτήσεις:

$$g(x) = e^x,\ h(x) = \ln x$$

δεν έχουν κοινό σημείο στο $(1, +\infty)$.

Μονάδες 4

Δ2. α. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία της και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 4

β. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης: $f(x) = \dfrac{\lambda}{x}$ με $\lambda \in \mathbb{R}$, $x > 1$.

Μονάδες 8

Δ3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο της $A(e, f(e))$.

Μονάδες 4

Δ4. Να αποδείξετε ότι:

α. $\dfrac{f(x)}{e^{e-1}} \geq (1+e)x - e^2$, για κάθε $x > 1$ **β.** $\int_2^3 f(x)dx \geq e^{e-1} \cdot \dfrac{5 + 5e - 2e^2}{2}$

Μονάδες 2x3= 6

Δ5. Να αποδείξετε ότι:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2},$$

για κάθε $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$ με $x_1 < x_2$

Μονάδες 3

4ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$;

Μονάδες 4

Α2. Τι ονομάζουμε κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης f ;

Μονάδες 4

Α3. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ΄ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_o, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β), τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

Μονάδες 7

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Για κάθε συνάρτηση f συνεχή με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, ισχύει:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx \neq 0 \ .$$

β. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A, B), όπου: $A = \lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)$ και $B = \lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)$.

γ. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ «κοντά» στο x_o .

δ. Αν μια συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έχει συνεχή πρώτη παράγωγο και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε η f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$.

ε. Έστω συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ. Στα εσωτερικά σημεία του Δ όπου η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο, η γραφική παράσταση C_f της f έχει οριζόντια εφαπτομένη.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f με:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x+\kappa\eta\mu x}{x-x^2}, & \alpha\nu\ \ x<0 \\ \lambda, & \alpha\nu\ \ x=0 \\ \sqrt{8x^2+x+16}-3x, & \alpha\nu\ \ x>0 \end{cases}$$

Β1. Να δείξετε ότι $\kappa=2$ και $\lambda=4$.

Μονάδες 8

Β2. Να υπολογίσετε τα όρια: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

Μονάδες 10

Β3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f(x)=2\ln(8x+1)$$

έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(0,\,1)$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Έστω μία συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη η οποία ικανοποιεί τις επόμενες συνθήκες:

$$f(1)=0,\ \ f'(1)=1$$

$$2f(x)+4xf'(x)+x^2f''(x)=2\ln x+3,\ \text{για κάθε}\ \ x>0\ .$$

Δίνεται επίσης η συνάρτηση:

$$g(x)=2xf(x)+x^2f'(x)-x(2\ln x+1),\ x>0\ .$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή στο $(0, +\infty)$.

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \ln x,\ x > 0$.

Μονάδες 5

Γ3. α. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Μονάδες 4

β. Αν ένα σημείο $M\big(x(t), y(t)\big)$, όπου t ο χρόνος σε sec και $x(t) > 1$, κινείται πάνω στην καμπύλη της γραφικής παράστασης C_{fof} της fof με σταθερό ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του και ίσο με 1 cm/sec, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου M τη χρονική στιγμή t_0, κατά την οποία $x(t_0) = 2$ cm.

Μονάδες 6

Γ4. Να αποδείξετε ότι:

$$\left| f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \right| < \sqrt{f(\alpha)\cdot f(\beta)} \text{ για κάθε } \alpha, \beta \in \left(0, \frac{1}{e}\right] \text{ με } \alpha < \beta .$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^5 + x^3 + x,\ x \in \mathbb{R}$

Δ1. α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη.

Μονάδες 3

β. Να αποδείξετε ότι:

$$e^{5x} + e^{3x+2} + e^{x+4} \geq e^5 \cdot x \cdot \left(x^4 + x^2 + 1\right), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 4

Δ2. α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 1$ έχει μοναδική ρίζα $x_0 \in (0,1)$

Μονάδες 4

β. Να λύσετε την ανίσωση:

$$2x^6+3x^4+6x^2-12x \geq 2x_0{}^6+3x_0{}^4+6x_0{}^2-12x_0$$

Μονάδες 4

Δ3. Να αποδείξετε ότι:

$$3<\frac{\int_{\xi_1+1}^{\xi_2+1} f(t)dt}{\xi_2-\xi_1}<42 \text{ , με } 0<\xi_1<\xi_2<1.$$

Μονάδες 4

Δ4. α. Να αποδείξετε ότι: $3\int_0^1 e^{x^2}dx \geq 4$

Μονάδες 3

β. Να υπολογίσετε, συναρτήσει του x_0, το ολοκλήρωμα: $\int_0^1 \left|f^{-1}(x)\right| dx$.

Μονάδες 3

5ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Τι ορίζουμε ως εφαπτομένη (όχι κατακόρυφη) της γραφικής παράστασης C_f μίας συνάρτησης f στο σημείο της $A\left(x_0,\, f(x_0)\right)$;

Μονάδες 4

Α2. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

Μονάδες 4

Α3. Έστω η συνάρτηση $f\left(x\right)=x^{\nu}, \nu\in\mathbb{N}-\{0,\,1\}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ότι ισχύει: $f'\left(x\right)=\nu x^{\nu-1}$, δηλαδή $\left(x^{\nu}\right)'=\nu x^{\nu-1}$.

Μονάδες 7

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=0$.

β. Αν $f(x)=\int_2^4\sqrt{2+t^2}\,dt$, τότε $f'(3)=0$.

γ. Μια συνάρτηση f είναι «1-1», αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία (παράλληλη στον $x'x$) τέμνει τη γραφική παράστασή της σε ένα τουλάχιστον σημείο.

δ. Αν η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα, τότε υποχρεωτικά $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ε. Αν η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης έχει στο $+\infty$ οριζόντια ασύμπτωτη, τότε δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$(f\circ f)(x) + 2f(x) = 2x + 1 \text{ , για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(2) = 5$$

Β1. Να βρείτε το $f(5)$.

Μονάδες 5

Β2. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

Μονάδες 7

Β3. Να βρείτε το $f^{-1}(2)$.

Μονάδες 6

Β4. Να λύσετε την εξίσωση: $f\left(f^{-1}\left(2x^2 + 7x\right) - 1\right) = 2$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με g παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$, για τις οποίες ισχύουν οι επόμενες σχέσεις:

$$f(x) = x(x + \alpha) - x + 1 \quad \text{με } \alpha, x \in \mathbb{R} ,$$

$$f(x) - 1 \geq 0 \text{, για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και}$$

$$g'(x)\ln x = \frac{2g(x)}{x} \text{ , για κάθε } x > 1$$

Γ1. Να δείξετε ότι $\alpha = 1$.

Μονάδες 3

Γ2. Αν $g(e) = -1$, να δείξετε ότι: $g(x) = -\ln^2 x$, για κάθε $x \in (1, +\infty)$.

Μονάδες 5

Γ3. Αν $g(x) = -(\ln x)^2$ σε όλο το διάστημα $(0, +\infty)$.

α. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδική τιμή $x_0 \in (0, 1)$, για την οποία η διαφορά $f(x) - g(x)$ γίνεται ελάχιστη.

Μονάδες 5

β. Να αποδείξετε όι υπάρχει μοναδικό ζεύγος σημείων M, N με $M(\xi, f(\xi))$ σημείο της γραφικής παράστασης C_f της f και $N(\xi, g(\xi))$ σημείο της γραφικής παράστασης C_g της g με $\xi \in (0, +\infty)$, στα οποία οι C_f και C_g δέχονται παράλληλες εφαπτομένες στα σημεία M και N αντίστοιχα.

Μονάδες 4

Γ4.

α. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to 1^+}\left[\frac{(x-1)^x}{\eta\mu(x-1)+\dfrac{g(x)}{f(x)}}\right]$$

Μονάδες 4

β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των f και g αντίστοιχα και των ευθειών $x=1$, $x=e$

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται μια συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$, με συνεχή πρώτη παράγωγο για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

$$f(x)+f(1-x)=0 \ , \ f'(x)\neq 0 \quad \text{για κάθε} \quad x\in\mathbb{R}$$

Δ1. Να βρείτε την μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$.

Μονάδες 4

Δ2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε: $f'(x_0)=2f(1)$.

Μονάδες 3

Δ3. Έστω η συνάρτηση: $g(x)=\dfrac{f(x)}{f'(x)}$, $x\in\mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g, στο σημείο στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα $x'x$, σχηματίζει με αυτόν γωνία 45^0.

Μονάδες 4

Δ4.

α. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^1 f(x)dx = 0$$

Δίνεται επιπλέον ότι $\int_0^1 f'(x)dx = 1$ καθώς και ότι η συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 3

β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\Omega)$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1} και τις ευθείες $x = -\dfrac{1}{2}$, $x = \dfrac{1}{2}$.

Μονάδες 4

Δ5.

α. Να υπολογίσετε την παράσταση :

$$K(\lambda) = \int_{\frac{1}{2}}^{\lambda} f(x)dx + \int_0^{f(\lambda)} f^{-1}(x)dx, \text{ όπου } \lambda > \frac{1}{2}.$$

Μονάδες 4

β. Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{K(\lambda) \cdot \ln\lambda}{f(\lambda) \cdot e^{\lambda}}$$

Μονάδες 3

6ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. α. Να διατυπώσετε το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών **(Μονάδες 2)** και στη συνέχεια να το αποδείξετε (**Μονάδες 4)**

β. Να δώσετε ένα παράδειγμα, σχεδιάζοντας ένα πρόχειρο σχήμα, μιας συνάρτησης f που δεν είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, η οποία δεν παίρνει υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές ανάμεσα στα $f(\alpha), f(\beta)$ **(Μονάδες 2).**

Α2. Να βρείτε το λάθος στον επόμενο συλλογισμό **(Μονάδες 2).** Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας **(Μονάδες 2).**

$$I=\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx=\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+\frac{1}{u^2}}\cdot\left(-\frac{1}{u^2}\right)du=-\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+u^2}du=-I$$ (θέσαμε $x=\frac{1}{u}$,

οπότε $dx=-\frac{1}{u^2}du$). Άρα $I=-I$, οπότε $I=0$. Αυτό, όμως, είναι άτοπο, αφού

$I=\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx>0$, επειδή $\frac{1}{1+x^2}>0$, για κάθε $x\in[-1, 1]$.

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $ho(gof)$, τότε ορίζεται και η $(hog)of$ και ισχύει $ho(gof)=(hog)of$.

β) Για κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι $[f(\alpha), f(\beta)]$ ή $[f(\beta), f(\alpha)]$.

γ) Αν για κάθε συνάρτηση f και για ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

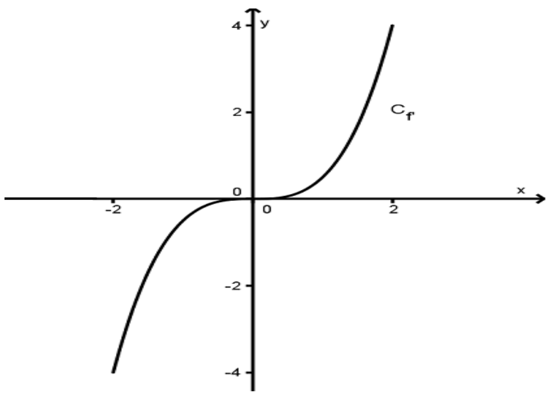
τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

δ) Μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ δεν έχει ασύμπτωτες.

ε) Για όλες τις συνεχείς στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις $[\alpha, \beta]$ με: $\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\gamma f(x)dx$ ισχύει $\beta = \gamma$ $(\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R})$

Μονάδες 10

Α4. Στο επόμενο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας συνάρτησης f στο διάστημα $[-2, 2]$. Επιλέξτε τη σωστή απάντηση **(Μονάδες 2)** και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας **(Μονάδα 1)**



Το σημείο $A(0, f(0))$ είναι:

α. θέση τοπικού μέγιστου της f,

β. θέση τοπικού ελάχιστου της f,

γ. σημείο καμπής της C_f.

ΘΕΜΑ Β

Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$$f(1 + f(x)) = 2x - 6 + f(x) \ (1) \text{ , για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Β1. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

Μονάδες 8

Β2. Να αποδείξετε ότι $f(3)=2$

Μονάδες 7

Β3. Να λύσετε την εξίσωση:

$$f\left(1+f\left(x^2+x+1\right)\right)=f\left(1+f(3)\right)$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση: $f\left(x\right)=e^x+x^2+x,\ x\in\mathbb{R}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένας αριθμός $\alpha\in\left(-1,\,0\right)$ τέτοιος, ώστε να ισχύει: $e^{\alpha}+2\alpha+1=0$.

Μονάδες 5

Γ2. Να δείξετε ότι:

$$f\left(x\right)\geq\alpha^2-\alpha-1 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}\text{ ,}$$

όπου α ο αριθμός του ερωτήματος Γ1.

Μονάδες 5

Γ3. Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης: $f\left(x\right)=\dfrac{2017}{2016}$

Μονάδες 5

Γ4. Να αποδείξετε ότι:

$$f\left(x^2+1\right)+f\left(x^2+2\right)<f\left(x^2\right)+f\left(x^2+3\right)\text{ , για κάθε } x>0$$

Μονάδες 5

Γ5. Έστω ένα σημείο $M\left(x(t),\,y(t)\right)$, όπου t ο χρόνος, το οποίο διατρέχει τη γραφική παράσταση της f με $x'(t)\neq 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει χρονική στιγμή t_0, με $x\left(t_0\right)\in\left(-1,\,0\right)$, ώστε ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του M, ως προς τον χρόνο, να μηδενίζεται.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$f'(x) = x\eta\mu x, \ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ και } f(0) = 0$$

Δ1. α. Να δείξετε ότι: $f(x)=\eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x, \ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Μονάδες 3

β. Να δείξετε ότι: $\eta\mu x > x\sigma\upsilon\nu x, \ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Μονάδες 2

Δ2. Έστω επίσης η συνάρτηση:

$$g(x) = |x\varepsilon\varphi x - x^2|, \ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Να μελετήσετε τη g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 4

Δ3. α. Αν $\alpha > 0$, να δείξετε ότι το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης $g(x) = \alpha$ είναι μηδέν.

Μονάδες 4

β. Έστω x_1, x_2, x_3 οι θετικές ρίζες των εξισώσεων: $g(x) = 1, \ g(x) = 2, \ g(x) = 3$ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ με $\xi_1 < \xi_2$ τέτοια, ώστε:

$$(x_2 - x_1)g'(\xi_1) + (x_3 - x_2)g'(\xi_2) = 2$$

Μονάδες 4

Δ4. α. Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln\left[\eta\mu x - f(x)\right] - \ln x + x^2}{\eta\mu^2 x - x\sigma\upsilon\nu x + x}$

Μονάδες 3

β. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και $-f'$ και την ευθεία $x = \frac{\pi}{2}$.

Μονάδες 5

7ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν ισχύουν:

- οι f, g είναι συνεχείς στο Δ,
- $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

να αποδείξετε ότι υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει:

$$f(x) = g(x) + c$$

Μονάδες 6

Α2 .

α. Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ;

Μονάδες 3

β. Ποια είναι η γεωμετρική ερμηνεία του Θεωρήματος Μέσης Τιμής του διαφορικού λογισμού; (Να κάνετε πρόχειρο σχήμα).

Μονάδες 6

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση «1-1», αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 = x_2$, τότε $f(x_1) = f(x_2)$.

β. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα $x'x$, της γραφικής παράστασης της f.

γ. Αν $f(x) = \alpha^x$, $\alpha > 0$, τότε $f'(x) = \alpha^x$

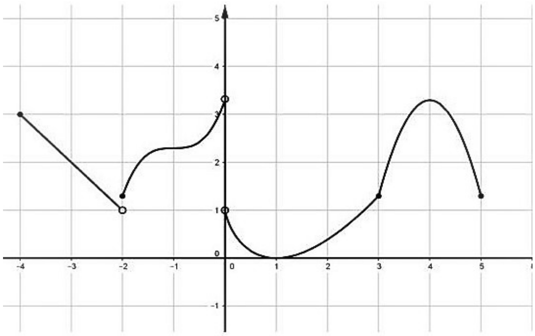
δ. Αν η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f έχει στο $+\infty$ οριζόντια ασύμπτωτη , τότε δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

ε. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε: $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\alpha) - G(\beta)$ **.**

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:[-4,\ 0)\cup(0,\ 5]\to\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο επόμενο σχήμα:



Β1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη συνέχεια.

Μονάδες 3

Β2. Να βρείτε το όρια: **α.** $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$ και **β.** $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

Μονάδες 4

Β3.

α. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα $(0,\ 5]$. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 4

β. Να βρείτε την παράγωγο της f, όταν $x\in(-4,\ -2)$.

Μονάδες 2

Β4. Ποια από τα παρακάτω ολοκληρώματα ορίζονται;

$$I = \int_{2}^{4} f(x)dx \ , \quad J = \int_{-1}^{0} f(x)dx$$

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 4

B5. Δίνεται η συνάρτηση: $g(x) = x + 1$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της fog .

Μονάδες 4

β. Να εξηγήσετε πως με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f μπορείτε να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης fog .

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^3 + x + 1,\ x \in \mathbb{R}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο, το $A(-1,\ -1)$.

Μονάδες 4

Γ3. Να αποδείξετε ότι:

α. Ισχύει: $\left|f^{-1}(x) - f^{-1}(y)\right| \le |x - y| \le |f(x) - f(y)|$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$

β. Η συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 6

Γ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0,\ 1)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει:

$$f^{-1}(\xi) + 2\xi = 0$$

Μονάδες 6

Γ5. Αν για την παράγουσα F της f' ισχύει:

$$F^2(x) \ge F(x)F(2 - x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

να βρείτε τον τύπο της F.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0, +\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν οι επόμενες σχέσεις:

- $f(1) = -1$
- $f'(x) + f(x) + 4e^{x-1} = \ln x + \dfrac{1}{x} + x + 1$ για κάθε $x > 0$

Δ1. Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \ln x + x - 2e^{x-1}$, $x > 0$

Μονάδες 4

Δ2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $f'(x) = \int_e^{e^2} \dfrac{f'(\ln t)}{t} dt$ έχει μια μόνο ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.

Μονάδες 3

Δ4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης: $h(x) = \dfrac{1}{x^2} f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ με $x > 0$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \dfrac{1}{e}$, $x = 1$.

Μονάδες 5

Δ5. Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση: $g(x) = -f(x)$, $x > 0$.

Αν η ευθεία $x = \lambda$, $\lambda > 0$ τέμνει τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g στα σημεία A_λ, B_λ αντίστοιχα, να βρείτε:

α. Την ελάχιστη τιμή των αποστάσεων $(A_\lambda B_\lambda)$.

Μονάδες 3

β. Τα όρια: $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \dfrac{E(\lambda)}{\lambda^2 + 1}$ και $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} \dfrac{E(\lambda)}{\lambda^2 + 1}$,

όπου $E(\lambda)$ είναι το εμβαδόν του τριγώνου $OA_\lambda B_\lambda$ και O η αρχή των αξόνων.

Μονάδες 4

8ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$;

Μονάδες 4

Α2. α. Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Να αποδείξετε ότι:

«Αν η f είναι παραγωγίσμη με $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ»**.**

Μονάδες 6

β. Ισχύει το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος; **(Μονάδες 1)**

Αν ναι να το αποδείξετε, αν όχι να δώσετε κατάλληλο αντίπαράδειγμα .

(**Μονάδες 3)**

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = +\infty$.

β. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ΄ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε η f είναι και παραγωγίσιμη στο x_0.

γ. Αν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f και η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, τότε $f''(x_0) = 0$.

δ. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ με $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$, τότε κατ΄ ανάγκη θα είναι $f(x) = 0$ για κάθε x στο $[\alpha, \beta]$.

ε. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, τότε ισχύει: «Το $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα

$x'x$ μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$ ».

Μονάδες 10.

Για τις προτάσεις που χαρακτηρίσατε ως Λάθος, να βρείτε κατάλληλο παράδειγμα που να επιβεβαιώνει τον ισχυρισμό σας **(Μονάδες 1).**

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $0 < f(x) < 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση: $g(x) = \dfrac{f(x)}{f^2(x)+1}$.

Β1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με την f.

Μονάδες 6

Β2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση fog είναι γνησίως αύξουσα και «1-1».

Μονάδες 4

Β3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $f\left(g\left(x^3+1\right)\right) = f\left(g\left(4x^2+2x\right)\right)$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες και μια αρνητική ρίζα.

Β4. Να λύσετε την ανίσωση: $(fog)\left(x^3+4\right) > (fog)\left(3x^2\right)$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνάρτηση «1-1» και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1}

Μονάδες 4

Επιβεβαιώστε γραφικά ότι η συνάρτηση f είναι «1-1», δίνοντας και μία γεωμετρική ερμηνεία για αυτό.

Μονάδες 2

Γ2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει: $f(\eta\mu x) > f\left(x - \frac{1}{6}x^3\right)$

Μονάδες 9

Γ3. Ένα κινητό (θεωρήστε το ως σημείο) M κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = x^3,\ x \geq 0$ με $x = x(t)$ και $y = y(t)$ ως συναρτήσεις του χρόνου t. Να βρείτε σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης $y(t)$ του M είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης $x(t)$, αν υποτεθεί ότι $x'(t) > 0$ για κάθε $t \geq 0$.

Μονάδες 3

Να δώσετε μία περιγραφή, με φυσική ερμηνεία, του παραπάνω προβλήματος.

Μονάδες 1

Γ4. Αν $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και άρτια συνάρτηση, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμ

$$\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx .$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται συνάρτηση $f:\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \to \mathbb{R}$ παράγουσα της $-3\eta\mu^3 x$ με $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$ και συνάρτηση g τέτοια, ώστε:

$$g(x) = 3\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu^3 x,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις $f,\ g$ είναι ίσες στο διάστημα $\Delta = \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$

Μονάδες 3

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι άρτια και η g' είναι περιττή στο $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Μονάδες 4

Δ3. α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 4

β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 3

Δ4. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g, f^{-1}.

Μονάδες 3

Δ5. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τη $C_{f^{-1}}$ και τις ευθείες: $(\varepsilon_1): x+y=2$, $(\varepsilon_2): x+y=-\frac{\pi}{2}$.

Μονάδες 3

Δ6. α. Να αποδείξετε ότι το σημείο $A\left(\frac{5\sqrt{2}}{4}, -\frac{\pi}{4}\right)$ βρίσκεται πάνω στη $C_{f^{-1}}$

Μονάδες 2

β. Αν η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στα εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού της, να βρείτε την κλίση της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο A.

Μονάδες 3

9ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μία συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Πότε λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0;

Μονάδες 4

Α2. α. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν:

- Η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ,

τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Μονάδες 6

β. Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Να χαρακτηρίσετε την επόμενη πρόταση ως Ψευδή ή Αληθή **(Μονάδες 1)**

«Αν η f είναι κυρτή στο Δ, τότε $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ».

Αν η πρόταση είναι αληθής να το αποδείξετε, ενώ αν είναι ψευδής να δώσετε κατάλληλο αντιπαράδειγμα.

Μονάδες 4

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση,τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Κάθε συνάρτηση f που είναι «1-1» είναι και γνησίως μονότονη.

β. Αν $\alpha > 1$, τότε ισχύει $\lim\limits_{x\to-\infty} \alpha^x = 0$.

γ. Αν f είναι μια οποιαδήποτε συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$ με $f(x) \ge 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx \ge 0$.

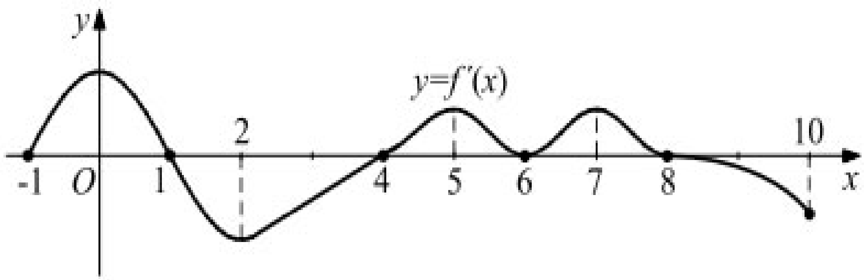
δ. Κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο x_0.

ε. Αν $c > 0$, τότε το $\int_\alpha^\beta c dx$ ($\beta > \alpha$) εκφράζει το εμβαδόν ενός ορθογωνίου με βάση $\beta - \alpha$ και ύψος c.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Β1. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μίας συνάρτησης f στο διάστημα $[-1, 10]$.



Να προσδιορίσετε:

α. τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα και γνησίως φθίνουσα.

Μονάδες 5

β. τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή και κοίλη.

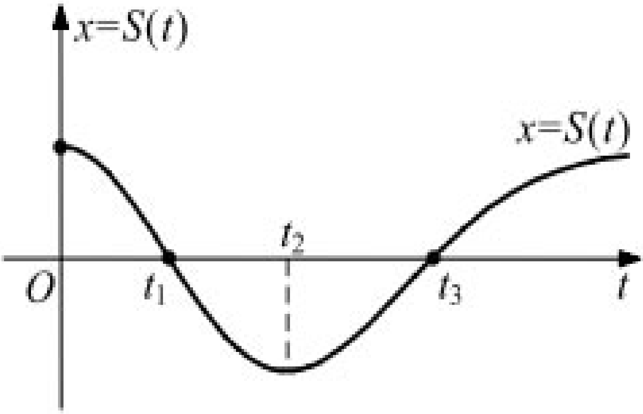
Μονάδες 5

γ. τις θέσεις τοπικών ακροτάτων και των σημείων καμπής.

Μονάδες 5

Σε όλα τα ερωτήματα να *δικαιολογήσετε* τις απαντήσεις σας.

Β2. Στο επόμενο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C της συνάρτησης θέσεως $x = S(t)$ ενός κινητού που κινείται πάνω σε ένα άξονα. Αν η C παρουσιάζει καμπή τις χρονικές στιγμές t_1 και t_3, να βρείτε:



α. Πότε το κινητό κινείται κατά τη θετική φορά και πότε κατά την αρνητική φορά.

Μονάδες 5

β. Πότε η ταχύτητα του κινητού αυξάνεται και πότε μειώνεται.

Μονάδες 5

Σε όλα τα ερωτήματα να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία, για κάθε $x>-2$ ισχύουν:

$$f\left(e^{f(x)}\right)=\ln(x+4) \quad \text{και} \quad (f\circ f)(e^{f(x)})=\ln\left(\ln(x+4)+2\right)$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη στο $(-2,+\infty)$

Μονάδες 4

Γ2. Να αποδείξετε ότι: $f(x)=\ln(x+2),\ x>-2$ και να δώσετε μία πρόχειρη γραφική παράσταση της f **.**

Μονάδες 6

Γ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $(f\circ f)(x)=f(e^{-x}+2)$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $\left(e^{2}-2,\ e^{3}-2\right)$.

Μονάδες 7

Γ4. Να αποδείξετε ότι για κάθε x_1, x_2 στο $(-2,+\infty)$ με $x_1 < x_2$, ισχύει:

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = e^x\left(x^2+x+3\right)$ και η παραγωγίσιμη συνάρτηση $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έτσι, ώστε να ισχύουν:

$g(2) + xg(x) - g(x+2) - (f(x)-3)^2 \le 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(2+h)-g(2-h)}{h} = 0$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $g'(2) = 0$

Μονάδες 4

Δ2. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f για $x \to -\infty$

Μονάδες 5

Δ3. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

Μονάδες 5

Δ4. Να βρείτε σημείο B της C_h με $h(x) = \sqrt{f(x)}$ ώστε το σημείο $A(2,\, 0)$ να απέχει την ελάχιστη απόσταση από τη C_h και να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_h είναι κάθετη στην ευθεία AB.

Μονάδες 5

Δ5. Αν $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ και $\int_{g(0)}^{g(\alpha)} f(x)dx = 0$, να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0,\, \alpha)$ τέτοιο, ώστε:

$$g'(x_0) = g(x_0)\cdot \varepsilon\varphi x_0.$$

Μονάδες 6

10ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$.

Τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον, $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \eta$.

Μονάδες 10

Α2.

α. Διατυπώστε το Θεώρημα του Bolzano για μια συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$.

Μονάδες 3

β. Πότε μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 2

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Η εικόνα ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα

β. Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $ho(gof)$, τότε ορίζεται και η $(hog)of$ και αυτές είναι υποχρεωτικά ίσες.

γ. Μία συνάρτηση f είναι «1-1», αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.

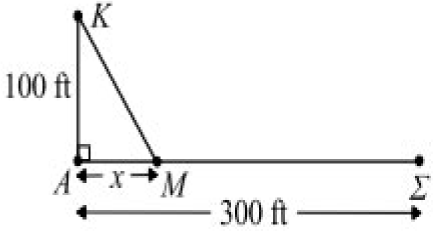
δ. Αν οι συναρτήσεις f , g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \le g(x)$ «κοντά» στο x_0, τότε: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \le \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.

ε. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Ένας κολυμβητής Κ βρίσκεται στη θάλασσα 100ft μακριά από το πλησιέστερο σημείο Α μιας ευθύγραμμης ακτής, ενώ το σπίτι του Σ βρίσκεται 300ft μακρυά από το σημείο Α. Υποθέτουμε ότι ο κολυμβητής μπορεί να κολυμβήσει με ταχύτητα 3ft/s και να τρέξει στην ακτή με ταχύτητα 5ft/s.



Β1. Να αποδείξετε ότι για να διανύσει τη διαδρομή ΚΜΣ του διπλανού σχήματος χρειάζεται χρόνο Τ:

$$T(x) = \frac{\sqrt{100^2 + x^2}}{3} + \frac{300 - x}{5}$$

Μονάδες 10

Β2. Για ποια τιμή του x ο κολυμβητής θα χρειαστεί το λιγότερο δυνατό χρόνο για να φθάσει στο σπίτι του;

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνάρτηση: $f(x) = \ln\left(e^x - 1\right) - x$

Γ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 3

Γ2. Να βρείτε το πρόσημο της f .

Μονάδες 4

Γ3. Μελετήστε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία..

Μονάδες 5

Γ4. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και βρείτε την $f^{-1}(x)$.

Μονάδες 4

Γ5. Αν $h(x) = \ln\frac{1}{x}$, αποδείξτε ότι υπάρχει $x_0 > 0$ τέτοιο, ώστε: $f(x_0) = h(x_0)$

Μονάδες 5

Γ6. Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(1)x^3 + x^2 + 2}{f(2)x^2 - x + 1}$

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Δ

Έστω f μία παραγωγίσιμη συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

$f'(x) = f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (1) και $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(x)dx = 1$ (2)

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$ και $f'(0) = 1$.

Μονάδες 5

Δ2. Έστω η συνάρτηση $g{:}\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$g(x) = f^2(x) + f^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

Να αποδείξετε ότι η g είναι σταθερή.

Μονάδες 5

Δ3. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)dx \ .$$

Μονάδες 5

Δ4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 = \frac{\pi}{2}$

Μονάδες 5

Δ5. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} \text{ και } \lim_{x\to +\infty}\frac{f(e^x)}{x}$$

Μονάδες 5

11ο Δ Ι Α Γ Ω Ν Ι Σ Μ Α

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι για κάθε πολυώνυμο:

$$P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0,$$

ισχύει: $\lim\limits_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$ με $x_0 \in \mathbb{R}$.

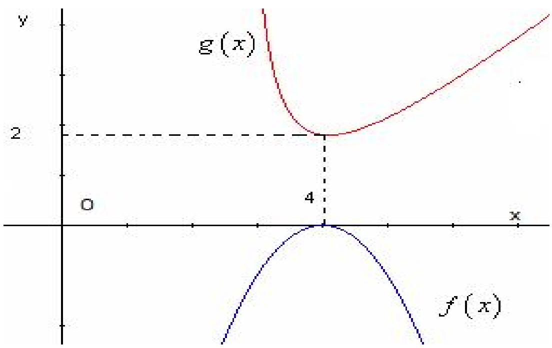
Μονάδες 10

Α2. Πότε μία συνάρτηση λέγεται συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 5

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Δίνεται το παρακάτω σχήμα, τότε $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$.



β. Αν η f δεν είναι αντιστρέψιμη, δεν είναι γνησίως μονότονη.

γ. Η f είναι «1-1» αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $y = f(x)$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x.

δ. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f στο σύνολο $A=[1,4]$ με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[1,4]$ και $f(3)=-2$. Τότε ισχύει $f(x)>0$ για κάθε $x\in[1,4]$

ε. Δίνεται η συνεχής και αντιστρέψιμη συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f^{-1}(-2015)=4\ ,\ f^{-1}(1949)=-1,$$

τότε δεν υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f^2(x)+2f(x)\eta\mu x=x^2+\sigma\upsilon\nu^2 x \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R} \text{ και } f(0)=1$$

Β1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$g(x)=f(x)+\eta\mu x,\ x\in\mathbb{R}$$

διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Μονάδες 10

Β2. Να αποδείξετε ότι: $f(x)=\sqrt{x^2+1}-\eta\mu x$

Μονάδες 5

Β3. Να βρείτε τα όρια: **α.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-2+\sigma\upsilon\nu x}{x}$ και **β.** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}2+\ln^2 x, & 0<x<e\\ \alpha x+\ln(x-e+1), & e<x\end{cases}$$

α. Να βρείτε τον αριθμό $\alpha\in\mathbb{R}$ έτσι, ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 5

β. Αν $\alpha = \frac{3}{e}$, τότε η εξίσωση $f(x) = 6$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $(1, 2e)$.

Μονάδες 5

Γ2. Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύουν:

- $f\left(e^{f(x)}\right) = 4\ln x + 3$, για κάθε $x > 0$ και
- $(f\circ f)\left(e^{f(x)}\right) = \ln\left(\ln x^4 + 3\right)^2 + 1$, για κάθε $x > e^{-\frac{3}{4}}$

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι «1-1».

Μονάδες 5

β. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

Μονάδες 3

γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$(f\circ f)(x) = f\left(e^{x-2014}\right)$$

έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + x, \ x \in \mathbb{R}.$$

Δ1. Να δείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 4

Δ2. Να βρείτε τη μονοτονία της συνάρτησης f στο $[0, +\infty)$.

Μονάδες 3

Δ3. Να δείξετε ότι $f(-x)=\frac{1}{f(x)}$ **(Μονάδες 2)** και ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ **(Μονάδες 5).**

Δ4. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει:

$$\left(\sqrt{\alpha^2+1}+\alpha\right)\left(\sqrt{\beta^2+1}+\beta\right)=1,$$

να αποδείξετε ότι $\alpha+\beta=0$.

Μονάδες 5

Δ5. Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης f.

Μονάδες 6

12ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ΄ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 10

Α2. Πότε δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες;

Μονάδες 5

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Αν η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε η f δεν είναι συνεχής στο x_0 .

β. Αν η συνάρτηση f δεν είναι στο συνεχής x_0, τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

γ. Αν δεν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f, g στο x_0, τότε δεν μπορεί να υπάρχει το όριο της $f+g$ στο x_0.

δ. Αν υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)$, τότε υπάρχει και το όριο της g στο x_0.

ε. Αν $f(x)=x^x$, $x>0$, τότε $f'(x)=x\cdot x^{x-1}$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και η συνάρτηση $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ώστε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να ισχύει η σχέση:

$$f\left(f(x)\right)=2g(x)-x$$

Β1. Να δείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 5

Β2. Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της συνάρτησης $h(x) = f(x) - g(x)$.

Μονάδες 5

Β3. Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ με $f(x_0) = x_0$

α. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g τέμνονται σε ένα μόνο σημείο

Μονάδες 5

β. Να λύσετε την εξίσωση:

$$f\left(f\left(x + x_0 - 2\right)\right) + x + x_0 = 2f\left(x + x_0 - 2\right) + 2$$

Μονάδες 5.

γ. Να λύσετε την ανίσωση:

$$f\left(f\left(\ln x + x_0 + 1\right)\right) + \ln x + 1 < x_0$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{x+1}}{x}, & -1 \leq x < 0 \\ \alpha^2 \ln(x+e) + 2\alpha + (\beta^2 + \dfrac{1}{2})e^x, & x \geq 0 \end{cases}$$

Γ1. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, να βρείτε τις τιμές των α και β

Μονάδες 8

Γ2. Αν $\alpha = -1$ και $\beta = 0$,

α. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{f(x)+1}{x+1}$

Μονάδες 5

β. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον θετικό ημιάξονα Ox σε ένα τουλάχιστον σημείο.

Μονάδες 6

γ. Να υπολογίσετετο όριο: $\lim\limits_{x\to 0}\left(xf(x)\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση C_f διέρχεται από το σημείο $A(0, 1)$.

Δ1. α. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}\left(xf(x)\right)$

Μονάδες 4

β. Να αποδείξετε ότι: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^2(2x)-1}{x}=4f'(0)$

Μονάδες 4

Δ2. Αν επιπλέον για την f ισχύει, $f^2(x)-4f(x)=x^2-3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να βρείτε τον τύπο της.

Μονάδες 7

Δ3. Αν $f(x)=2-\sqrt{x^2+1},\ x\in\mathbb{R}$

α. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f, οι οποίες διέρχονται από το σημείο $B\left(0,\ \dfrac{3}{2}\right)$.

Μονάδες 6

β. Έστω σημείο M της C_f με θετική τετμημένη. Αν η τετμημένη του M απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων O με ταχύτητα $2cm/sec$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου OAM.

Μονάδες 6

13ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Πότε η ευθεία $y = \lambda x + b$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$;

Μονάδες 4

Α2. Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$ και Ω το χωρίο που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$. Να ορίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω, αν η διαφορά $f(x) - g(x)$ δεν έχει σταθερό πρόσημο στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

Μονάδες 5

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση,τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση 1-1, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: Αν $x_1 = x_2$, τότε $f(x_1) = f(x_2)$.

β. Αν για μία παραγωγίσιμη συνάρτηση f ισχύει $f(\alpha) = f(b)$ με $\alpha < b$, τότε ορίζεται η $\dfrac{1}{f'(x)}$ στο $[\alpha, b]$.

γ. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: (\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ με $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$. Τότε η f παρουσιάζει ελάχιστο στο β.

δ. Κάθε συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα Δ έχει παράγουσα στο Δ.

ε. Για κάθε συνάρτηση f συνεχή στο $[\alpha, b]$ με $\int_\alpha^b f(x)dx > 0$ ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, b]$.

Μονάδες 10

A4.

α. Να χαρακτηρίσετε την επόμενη πρόταση ως Ψευδή ή Αληθή

«Για όλες τις συναρτήσεις $f, g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *με* $f+g$ *συνεχής στο* $x_0 \in \mathbb{R}$, *ισχύει ότι και η* f *και η* g *είναι επίσης συνεχείς συναρτήσεις στο* x_0 *».*

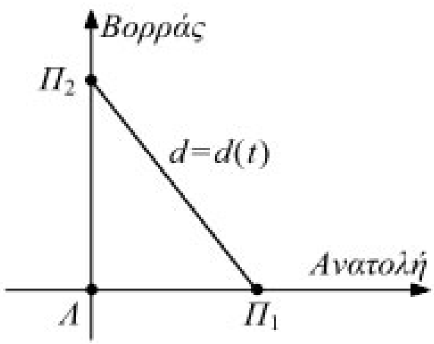
Μονάδες 2

β. Αν η παραπάνω πρόταση είναι αληθής να το αποδείξετε, ενώ αν είναι ψευδής να δώσετε κατάλληλο αντιπαράδειγμα.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Β

Δύο πλοία Π_1 και Π_2 αναχωρούν συγχρόνως από ένα λιμάνι Λ. Το πλοίο Π_1 κινείται ανατολικά με ταχύτητα $15\ km/h$ και το Π_2 βόρεια με ταχύτητα $20\ km/h$



B1. Να βρείτε τις συναρτήσεις θέσεως των $\Pi_1(t)$ και $\Pi_2(t)$ συναρτήσει του χρόνου t

Μονάδες 7

B2. Να βρείτε την απόσταση $d=(\Pi_1\Pi_2)$ των δύο πλοίων συναρτήσει του χρόνου t.

Μονάδες 8

B3. Να αποδείξετε ότι η απόσταση d αυξάνεται με σταθερό ρυθμό ως προς το χρόνο t τον οποίο και να προσδιορίσετε.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και η συνάρτηση g με $g(x)=f^2(x)-4xf(x)$ έτσι, ώστε να ισχύουν:

$$\int_{\alpha}^{x} g(t)dt = 8-x^3,\ x,\alpha\in\mathbb{R}\ (1)\ \text{και}\ f(-1)=-3\ \text{και}\ f(1)=1\ (2)$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η g έχει παράγουσα στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 4

Γ2. Αν η συνάρτηση G είναι παράγουσα της g στο $\mathbb{R}$, να βρείτε τον αριθμό α

Μονάδες 6

Γ3. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f

Μονάδες 8

Γ4. Αν $h(x)=e^x$, να κάνετε τη γραφική παράσταση της f και της h και να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της f, τη γραφική παράσταση C_h της h και τις ευθείες $x=-1$ και $x=1$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f^3(x)+f(x)=x^3+3x^2+4x+2\ ,\ \text{για κάθε}\ x\in\mathbb{R}$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι «1-1».

Μονάδες 5

Δ2.

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα $x_0\in(-2,\,0)$

Μονάδες 5

β. Να λύσετε την ανίσωση:

$$f\left(f\left(f(x)\right)\right)>f\left(f(0)\right).$$

Μονάδες 5

Δ3. Αν για τη συνάρτηση $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f\left(g(x)-4x\right)=f\left(3-x^2\right) \text{, για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

να βρείτε το x_1 στο οποίο η συνάρτηση g παρουσιάζει μέγιστο.

Μονάδες 5

Δ4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της της συνάρτησης $h = f^3 + f$ και τις ευθείες $x=-2$ και $x=0$.

Μονάδες 5

14ο Δ Ι Α Γ Ω Ν Ι Σ Μ Α

ΘΕΜΑ Α

Α1. Ποια είναι η γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος του Rolle; Να δώσετε ένα σχετικό πρόχειρο σχήμα.

Μονάδες 6

Α2. Έστω f μία συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$ και Ω το χωρίο που περικλείεται από τις γραφική παράστάση της f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$. Να ορίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω αν:

α. $f(x) \geq 0$ και **β.** $f(x) \leq 0$

Μονάδες 4

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση,τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού μεγαλύτερου ή ίσο του 2, της οποίας η γραφική παράσταση έχει ασύμπτωτη.

β. Μια συνεχής συνάρτηση f στο (α, β) παίρνει σε κάθε περίπτωση στο (α, β) μία μέγιστη και μία ελάχιστη τιμή.

γ. Αν η f έχει δεύτερη παράγωγο στο x_0, τότε η f' είναι συνεχής στο x_0.

δ. Δεν μπορεί ταυτόχρονα στο ίδιο διάστημα $[\alpha, b]$ να ισχύουν το θεώρημα του Rolle και το θεώρημα του Bolzano.

ε. Αν υπάρχει $x_0 \in [\alpha, b]$, ώστε $f(x_0) \neq 0$, τότε $\int_\alpha^b f^2(x)dx > 0$.

Μονάδες 10

Α4. Θεωρούμε τον επόμενο ισχυρισμό:

«Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $A(x_0, f(x_0))$ μπορεί να έχει και άλλο κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση της f »

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι Ψευδής.

Μονάδες 1

β. Γράψτε παράδειγμα σχετικό με την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1} \text{ και } g(x) = \sqrt{e^{x-1} - 1}$$

Β1. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g.

Μονάδες 4

Β2. Να ορίσετε την συνάρτηση fog .

Μονάδες 8

Β3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι αντιστρέψιμη ενώ η συνάρτηση g αντιστρέφεται και να βρείτε την g^{-1} .

Μονάδες 8

Β4. Να λύσετε την εξίσωση:

$$g\left(\sqrt{x^3+x}\right) = g\left(\sqrt{4x^2}\right)$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$g'(x) = \frac{1}{3g^2(x) + \varepsilon}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και ε μια σταθερά στο σύνολο $\mathbb{R}$.

Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της, στο σημείο της $A(0, g(0))$ έχει εξίσωση: $x - 2018y + 2018 = 0$.

Γ1. Να βρείτε τον αριθμό ε .

Μονάδες 4

Γ2. Να αποδείξετε ότι:

$$g^3(x) + 2015 \cdot g(x) = x + 2016 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 5

Γ3. Αν το σύνολο τιμών της συνάρτησης g είναι το $\mathbb{R}$, να αποδείξτε ότι η συνάρτηση g αντιστρέφεται και έχει τύπο:

$$g^{-1}(x) = x^3 + 2015x - 2016$$

Μονάδες 4

Γ4. Να βρείτε τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης της g.

Μονάδες 6

Γ5. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης:

$$f(x) = \frac{g^{-1}(x)}{x \cdot g(x) \cdot \left(g^2(x) + 2015\right)}$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$f(0) = \frac{1}{2} \text{ και } e^x \cdot f'(x) = f(x) - f'(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \dfrac{e^x}{1 + e^x}$

Μονάδες 5

Δ2.

α. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1}.

Μονάδες 4

β. Να λύσετε την ανίσωση: $f\left(f(x)\right) > \dfrac{\sqrt{e}}{1 + \sqrt{e}}$

Μονάδες 4

Δ3. Αν $g(x) = \ln x,\ x > 0$, να δείξετε ότι: $\left(f o g\right)^{-1} = g^{-1} o f^{-1}$

Μονάδες 3

Δ4.

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x$ έχει μοναδική ρίζα $x_0 \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 3

β. Να βρείτε συναρτήσει του x_0, το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της της συνάρτησης f και τις ευθείες $y = x$ και $x = 0$.

Μονάδες 3

γ. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}} f^{-1}(x)dx$$

Μονάδες 3

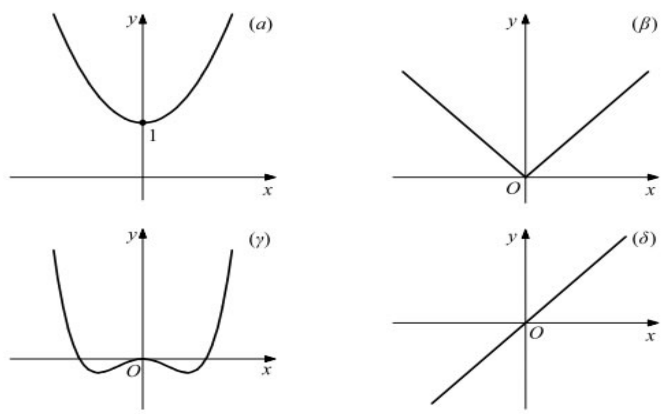
15ο Δ Ι Α Γ Ω Ν Ι Σ Μ Α

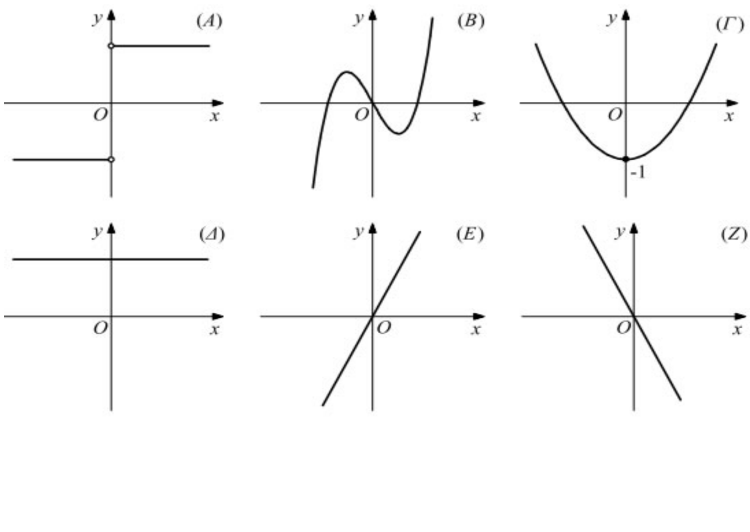
ΘΕΜΑ Α

Α1. Πότε μία συνάρτηση η οποία είναι συνεχής σ΄ ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στα εσωτερικά σημεία του Δ, λέγεται κυρτή στο Δ;

Μονάδες 4

Α2. Να αντιστοιχίσετε καθεμιά από τις συναρτήσεις α, β, γ, δ σε εκείνη από τις συναρτήσεις Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ που νομίζετε ότι είναι η παράγωγός της.





Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση,τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης περιττού βαθμού έχει πάντοτε οριζόντια εφαπτομένη.

β. Ισχύει: $\int_{\alpha}^{\beta}\left(f(x)\cdot g(x)\right)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \cdot \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$

γ. Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$.

δ. Ανάμεσα σε δυο ρίζες μιαςπολυωνυμικής συνάρτησης,υπάρχει πάντα τουλάχιστο μια ρίζα της παραγώγου της.

ε. Μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ δεν έχει ασύμπτωτες.

Μονάδες 10

Α4.

α. Να χαρακτηρίσετε την επόμενη πρόταση ως Ψευδή ή Αληθή.

Μονάδες 1

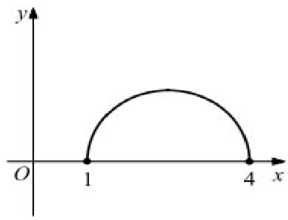
«Για όλες τις συναρτήσεις $f, g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *όπου οι* $f+g$, g *είναι συνεχείς στο* $x_0 \in \mathbb{R}$, *ισχύει ότι και η* f *είναι επίσης συνεχής στο* x_0*».*

β. Αν η πρόταση είναι αληθής να το αποδείξετε, ενώ αν είναι ψευδής να δώσετε κατάλληλο αντιπαράδειγμα.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Β

Έστω η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f που δίνεται από το επόμενο σχήμα:



Β1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $\frac{1}{f'}$. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 5

Β2. Να λύσετε την ανίσωση $f'(x) > 0$. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 5

Β3. Υπάρχει $x_0 \in (1, 4)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 5

Β4. Έχει αντίστροφη η συνάρτηση f ; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\ f(x) = 3\ln\left(x \cdot e^{1-x}\right) + 2,\ x > 0$.

Γ1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 5

Γ2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

Μονάδες 5

Γ3. Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης: $3f(x) + 2011 = 0$.

Μονάδες 5

Γ4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 2$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έτσι ώστε να ισχύει:

$$f^3(x) + 2f(x) = x + 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} .$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι «1-1».

Μονάδες 3

Δ2. Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$ και στη συνέχεια να βρείτε την αντίστροφή της.

Μονάδες 5

Δ3. Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης με το άξονα $x'x$.

Μονάδες 3

Δ4. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα .

Μονάδες 4

Δ5. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = -1$.

Μονάδες 4

1.2. Θέματα Πανελλαδικών Εξετάσεων

Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 2ο

2.1. Λύσεις Προτεινόμενων Διαγωνισμάτων

2.2. Λύσεις Θεμάτων Πανελλαδικών Εξετάσεων

2.1. Λύσεις Προτεινόμενων Διαγωνισμάτων

1ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση **«1−1»**, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: «Αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$»

Α2. Το $\int_\alpha^\beta c\,dx$ εκφράζει το εμβαδόν ενός ορθογωνίου με βάση β − α και ύψος c .

Α3. Για $x \neq x_0$, ισχύει :

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0} =$$

$$= \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, έχουμε :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)+g'(x_0)$$

Δηλαδή:

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0)+g'(x_0)$$

Α4.**α)** Σωστό **β)** Λάθος **γ)** Σωστό **δ)** Λάθος **ε)** Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Για το πεδίο ορισμού D_f της f έχουμε:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{x+1}{1-x} > 0 \\ 1-x \neq 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (x+1)(1-x) > 0 \\ x \neq 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow -1 < x < 1$$

Επομένως $D_f = (-1,\ 1)$

Β2. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $D_f = (-1,\ 1)$ ως πράξεις και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων αφού οι επόμενες συναρτήσεις:

$$g(x) = \frac{x+1}{1-x}$$

$$h(x) = \ln g(x)$$

$$\Phi(x) = 2\ln g(x) + 3$$

είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού της.

Β3. Έστω $x_1, x_2 \in D_f = (-1,\ 1)$ με $f(x_1) = f(x_2)$ Θα αποδείξουμε ότι $x_1 = x_2$ Έχουμε:

$$f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow 2\ln\frac{x_1+1}{1-x_1}+3=2\ln\frac{x_2+1}{1-x_2}+3\Leftrightarrow \ln\frac{x_1+1}{1-x_1}=\ln\frac{x_2+1}{1-x_2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1+1}{1-x_1}=\frac{x_2+1}{1-x_2}\Leftrightarrow (x_1+1)(1-x_2)=(1-x_1)(x_2+1)\Leftrightarrow 2x_1=2x_2\Leftrightarrow x_1=x_2$$

Άρα η f αντιστέφεται.

Για την αντίστροφή της έχουμε:

$$y=f(x)\Leftrightarrow y=2\ln\frac{x+1}{1-x}+3\Leftrightarrow 2\ln\frac{x+1}{1-x}=y-3\Leftrightarrow \ln\frac{x+1}{1-x}=\frac{y-3}{2}\Leftrightarrow \frac{x+1}{1-x}=e^{\frac{y-3}{2}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+1=(1-x)e^{\frac{y-3}{2}}\Leftrightarrow x+1=e^{\frac{y-3}{2}}-xe^{\frac{y-3}{2}}\Leftrightarrow x+xe^{\frac{y-3}{2}}=e^{\frac{y-3}{2}}-1\Leftrightarrow x\left(1+e^{\frac{y-3}{2}}\right)=e^{\frac{y-3}{2}}-1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{e^{\frac{y-3}{2}}-1}{1+e^{\frac{y-3}{2}}}$$

$$x\in D_f\Leftrightarrow -1<\frac{e^{\frac{y-3}{2}}-1}{\left(1+e^{\frac{y-3}{2}}\right)}<1\Leftrightarrow \left(\begin{array}{l}\dfrac{e^{\frac{y-3}{2}}-1}{\left(1+e^{\frac{y-3}{2}}\right)}<1\\[2ex] -1<\dfrac{e^{\frac{y-3}{2}}-1}{\left(1+e^{\frac{y-3}{2}}\right)}\end{array}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{array}{l}e^{\frac{y-3}{2}}-1<1+e^{\frac{y-3}{2}}\\[1ex] -1-e^{\frac{y-3}{2}}<e^{\frac{y-3}{2}}-1\end{array}\right)$$

Οι τελευταίες σχέσεις είναι αληθείς για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επομένως:

$$f^{-1}(x)=\frac{e^{\frac{x-3}{2}}-1}{1+e^{\frac{x-3}{2}}},\ x\in\mathbb{R}$$

Η $f^{-1}(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πηλίκο και σύνθεση των επόμενων συνεχών συναρήσεων:

$$f_1(x)=e^{\frac{x-3}{2}},\ f_2(x)=\frac{e^x-1}{1+e^x}$$

B4. Έχουμε:

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1^-}\left(2\ln\frac{x+1}{1-x}+3\right)=\lim_{u\to\infty}(2u+3)=+\infty\quad\left(u=\frac{x+1}{1-x},\ \lim_{x\to1^-}\frac{x+1}{1-x}=+\infty\right)$$

Επίσης:

$$\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1^+}\left(2\ln\frac{x+1}{1-x}+3\right)=\lim_{u\to0^+}(2\ln u+3)=-\infty$$

$$\left(u=\frac{x+1}{1-x},\ \lim_{x\to-1^+}\frac{x+1}{1-x}=0\right)$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η συνάρτηση f γίνεται:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{-x^2+1}(x-1)}{\ln x}, & \text{αν } x>0 \ \text{και}\ x\neq 1 \\ \dfrac{e^{-x^2+1}(x-1)}{\ln(-x)}, & \text{αν } x<0 \\ \kappa, & \text{αν } x=1 \\ 0, & \text{αν } x=0 \end{cases}$$

Για το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ έχουμε:

- $$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-x^2+1}(x-1)}{\ln x}=0$$

αφού $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[e^{-x^2+1}(x-1)\right]=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{-x^2+1}\cdot\lim\limits_{x\to 0^+}(x-1)=e\cdot(-1)=-e$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x)=-\infty$.

- $$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{-x^2+1}(x-1)}{\ln(-x)}=0$$

αφού $\lim\limits_{x\to 0^-}\left[e^{-x^2+1}(x-1)\right]=\lim\limits_{x\to 0^-}e^{-x^2+1}\cdot\lim\limits_{x\to 0^-}(x-1)=e\cdot(-1)=-e$ και

$\lim\limits_{x\to 0^-}(\ln(-x))=-\infty$

Επομένως είναι $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$ και άρα $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

Η συνάρτηση f ίναι συνεχής στο $\mathbb{R}-\{0,\ 1\}$ ώς πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Επίσης η f είναι συνεχής στο $x_0=0$, αφού $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0=f(0)$. Τέλος για να είναι η f συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$ πρέπει να είναι συνεχής και στο $x_1=1$.

Έχουμε, σύμφωνα με τον κανόνα του de L΄ Hospital:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{e^{-x^2+1}(x-1)}{\ln x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{e^{-x^2+1}\left(-2x^2+2x+1\right)}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 1}\left[e^{-x^2+1}\left(-2x^2+2x+1\right)x\right]=1$$

Επομένως $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)=\kappa \Leftrightarrow \kappa=1$

Γ2. α) Η συνάρτηση: $g(x)=f(x)\ln\left(\dfrac{1}{x^2}\right),\ x>0$

γίνεται διαδοχικά:

Για $x=1$ έχουμε $g(1)=f(1)\cdot\ln 1=0$ και

$$g(x)=\frac{e^{-x^2+1}(x-1)}{\ln|x|}\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)=\frac{e^{-x^2+1}(x-1)}{\ln x}\left(\ln 1-\ln x^2\right)=\frac{e^{-x^2+1}(x-1)}{\ln x}(-2\ln x)=-2e^{-x^2+1}(x-1)$$

Επομένως θα μελετήσουμε τη μονοτονία της συνάρτησης:

$$g(x) = -2e^{-x^2+1}\left(x-1\right),\ x>0$$

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,\ \infty\right)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$g'\left(x\right) = -2\left[-2x\left(x-1\right)e^{-x^2+1}+e^{-x^2+1}\right] = -2e^{-x^2+1}\left(-2x^2+2x+1\right),\ x>0$$

Επειδή $-2e^{-x^2+1}<0,\ \text{για } x>0$ το πρόσημο της $g'\left(x\right)$ εξαρτάται από το πρόσημο του τριωνύμου $-2x^2+2x+1$

Ο πίνακας προσήμου της $g'\left(x\right)$ είναι ο επόμενος:

x	0	$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$	$+\infty$
$g'\left(x\right)$	$-$		$+$
$g\left(x\right)$	$\searrow$		$\nearrow$

Επομένως η συνάρτηση g είναι:

Γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(0,\ \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right]$ και

Γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[\dfrac{1+\sqrt{3}}{2},\ +\infty\right)$

β) Σύμφωνα με τον πίνακα προσήμου της $g'\left(x\right)$ του ερωτήματος (i) η συνάρτηση g έχει ελάχιστο (ολικό) στο σημείο $x_2=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ το $g\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)=e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(1-\sqrt{3}\right)$

Επομένως για κάθε $x>0$ έχουμε:

$$g\left(x\right)\geq g\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\Leftrightarrow -2e^{-x^2+1}\left(x-1\right)\geq e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(1-\sqrt{3}\right)\Leftrightarrow e^{-x^2+1}\left(x-1\right)\leq\frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}$$

Άρα:

- Για $x-1>0\Leftrightarrow x>1$ έχουμε:

$$e^{-x^2+1}\leq\frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2\left(x-1\right)}$$

- Για $x-1<0\ \kappa\alpha\iota\ x>0\Leftrightarrow 0<x<1$ έχουμε:

$$e^{-x^2+1}\geq\frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2\left(x-1\right)}$$

Γ3. α) Η $g'(x)$ είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x>0$ ή αλλιώς η $g(x)$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη για κάθε $x>0$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$g''(x)=-4e^{-x^2+1}\left(2x^3-2x^2-3x+1\right)=-4e^{-x^2+1}\left(2x^3-2x^2-3x+1\right)=-4e^{-x^2+1}\left(x+1\right)\left(2x^2-4x+1\right),\ x>0$$

Επειδή $-4e^{-x^2+1}<0\ \gamma\iota\alpha\ x>0$ και $x+1>0$ το πρόσημο της $g''(x)$ εξαρτάται από το πρόσημο του $2x^2-4x+1$

Ο πίνακας του προσήμου της $g''(x)$ είναι ο επόμενος:

x	0 — $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ — $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$	$\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ — $+\infty$
$g''(x)$	$-$	$+$	$-$
$g(x)$	$\cap$	$\cup$	$\cap$

Επομένως η συνάρτηση g :

- Είναι κοίλη (στρέφει τα κοίλα κάτω) στο διάστημα $\left(0,\ \frac{2-\sqrt{2}}{2}\right]$
- Είναι κυρτή (στρέφει τα κοίλα άνω) στο διάστημα $\left[\frac{2+\sqrt{2}}{2},\ \frac{2-\sqrt{2}}{2}\right]$
- Είναι κοίλη (στρέφει τα κοίλα κάτω) στο διάστημα $\left[\frac{2+\sqrt{2}}{2},\ +\infty\right)$
- Τα σημεία καμπής της είναι το $A\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2},g\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)\right)$ ή το

  $A\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2},\ \sqrt{2}e^{\frac{2\sqrt{2}-1}{2}}\right)$ και το $B\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2},\ g\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)\right)$ ή το

  $B\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2},\ -\sqrt{2}e^{-\frac{1+2\sqrt{2}}{2}}\right)$

β) Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο $A\left(2,\ g(2)\right)$ είναι:

$$y-g(2)=g'(2)(x-2)\Leftrightarrow y+2e^{-3}=6e^{-3}(x-2)\Leftrightarrow y=6e^{-3}x-14e^{-3}$$

Επειδή η g είναι κοίλη (στρέφει τα κοίλα κάτω) στο διάστημα $\left[\frac{2+\sqrt{2}}{2},\ +\infty\right)$ θα είναι:

$$y \ge g(x) \Leftrightarrow 6e^{-3}x - 14e^{-3} \ge -2e^{-x^2+1}(x-1) \Leftrightarrow -3e^{-3}x + 7e^{-3} \le e^{-x^2+1}(x-1) \Leftrightarrow$$
$$e^{-4}(-3x+7) \le e^{-x^2}(x-1)$$

, για κάθε $x \in \left(\dfrac{2+\sqrt{2}}{2},\ +\infty\right)$

Επίσης, η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο $B(1,\ g(1))$ είναι:

$$y - g(1) = g'(1)(x-1) \Leftrightarrow y = -2(x-1)$$

Επειδή η g είναι κυρτή (στέφει τα κοίλα άνω) στο διάστημα $\left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{2},\ 1\right) \subset \left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$

θα είναι:

$$y \le g(x) \Leftrightarrow -2(x-1) \le -2e^{-x^2+1}(x-1) \Leftrightarrow x-1 \ge e^{-x^2+1}(x-1) \Leftrightarrow 1 \le e^{-x^2+1} \Leftrightarrow e^{-x^2} \ge e^{-1}$$

,

για κάθε $x < 1$ αφού $x - 1 < 0$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Αφού η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ το 1ο μέλος της δοθείσας σχέσης είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων), όπως προφανώς παραγωγίσιμη είναι η συνάρτηση του 2ου μέλους. Παραγωγίζοντας[1] λοιπόν τα μέλη της δοθείσας σχέσης έχουμε διαδοχικά (όχι ισοδύναμα):

$$e^{f(x)}(f^2(x) - 2f(x) + 3) = x$$
$$e^{f(x)}f'(x)[f^2(x) - 2f(x) + 3] + e^{f(x)}[2f(x)f'(x) - 2f'(x)] = 1$$
$$e^{f(x)}[f'(x)f^2(x) - 2f(x)f'(x) + 3f'(x) + 2f(x)f'(x) - 2f'(x)] = 1$$
$$e^{f(x)}[f'(x)f^2(x) + f'(x)] = 1 \Leftrightarrow e^{f(x)}f'(x)(f^2(x)+1) = 1$$
$$f'(x) = \frac{e^{-f(x)}}{f^2(x)+1} > 0, x \in (0,\infty)$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,\infty)$ άρα είναι «1-1» και επομένως είναι αντιστρέψιμη.
Για την εύρεση της αντίστροφης συνάρτησης θέτουμε:

$$f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \text{ με } x \in A = (0,\infty) \text{ και } y \in f(A) = \mathbb{R}$$

Άρα, θα έχουμε από την δοθείσα σχέση:

$$e^y(y^2 - 2y + 3) = f^{-1}(y), y \in \mathbb{R} \text{ ή } f^{-1}(x) = e^x(x^2 - 2x + 3),\ x \in \mathbb{R}$$

Δ2. Η συνάρτηση:

$$f^{-1}(x) = e^x(x^2 - 2x + 3),\ x \in \mathbb{R}$$

Είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με:

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = e^x(x^2 - 2x + 3) + e^x(2x - 2) = e^x(x^2 + 1),\ x \in \mathbb{R}$$

---

[1] Μπορεί να αποδειχθεί και χωρίς την παραγωγισιμότητα της f με ιδιότητες της ισότητας.

Η συνάρτηση $\left(f^{-1}(x)\right)'$ είναι επίσης παραγωγίσιμη $\mathbb{R}$ (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με:

$$\left(f^{-1}(x)\right)'' = e^x(x^2+1) + 2xe^x = e^x(x+1)^2,\ x \in \mathbb{R}$$

Δηλαδή:

$$\left(f^{-1}(x)\right)'' > 0,\ x \in (-\infty, -1)\ \kappa\alpha\iota\ x \in (-1,\ -\infty)$$

που σημαίνει ότι η $f^{-1}(x)$ είναι κυρτή στο $(-\infty, -1]$ και στο $[-1, +\infty)$ (δηλαδή στρέφει τα κοίλα άνω στο $\mathbb{R}$).

Η συνάρτηση $f^{-1}(x)$ τέμνει τον άξονα $x'x$ όταν $x = 0 \Rightarrow f^{-1}(0) = 3$ δηλαδή στο σημείο $A(0,3)$. Αν θέσουμε $g(x) = f^{-1}(x),\ x \in \mathbb{R}$ τότε η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της g στο σημείο A είναι :

$$y - 3 = g'(0)(x-0) \Leftrightarrow y = x + 3\ \ (g'(0) = (f^{-1})'(0) = 3$$

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E = \int_0^1 \left| f^{-1}(x) - (x+3) \right| dx = \int_0^1 [e^x(x^2 - 2x + 3) - x - 3]dx =$$

$$= \int_0^1 x^2 e^x dx - 2\int_0^1 xe^x dx + 3\int_0^1 e^x - [\frac{x^2}{2}]_0^1 - 3[x]_0^1 = 4e - \frac{21}{2}\tau.\mu$$

(χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η f^{-1} είναι κυρτή δηλαδή ότι: $f^{-1}(x) \geq x + 3,\ x \in \mathbb{R}$ άρα $f^{-1}(x) - (x+3) \geq 0,\ x \in (0.1)$

Δ3. α)[2] Έχουμε:

$$f'(x) = \frac{e^{-f(x)}}{f^2(x)+1},\ x \in (0, \infty)\ \text{ και } \left(f^{-1}(x)\right)' = e^x(x^2+1),\ x \in \mathbb{R}$$

Άρα :

$$f'(f^{-1}(x) = \frac{e^{-f(f^{-1}(x))}}{[f(f^{-1}(x))]^2 + 1} = \frac{e^{-x}}{x^2+1}$$

$$f'(f^{-1}(x)) \cdot [f^{-1}(x)]' = \frac{e^{-x}}{x^2+1} \cdot e^x(x^2+1) = 1$$

β) Η απόσταση των σημείων A και B είναι :

$$(\mathrm{AB})^2 = 2(x - f^{-1}(x))^2,\ x \in \mathbb{R}$$

$$(\mathrm{AB}) = \sqrt{2}\left| x - f^{-1}(x) \right|,\ x \in \mathbb{R}$$

$$(\mathrm{AB}) = \sqrt{2}(f^{-1}(x) - x),\ x \in \mathbb{R}$$

(Χρησιμοποιήσαμε $f^{-1}(x) \geq x + 3 > x,\ x \in \mathbb{R} \Rightarrow f^{-1}(x) - x > 0$.

Αν θέσουμε :

---

[2]Αυτό το συμπέρασμα ισχύει και γενικότερα αφού: $f(f^{-1}(x)) = x, x \in D_{f^{-1}}$ και παραγωγίζοντας τα μέλη της έχουμε $f'(f^{-1}(x)) \cdot [f^{-1}(x)]' = 1$.

Επίσης τα σημεία $A(x,\ f^{-1}(x))$ και $B(f^{-1}(x), x)$ είναι συμμετρικά ως προς την $y = x$.

$$h(x)=\sqrt{2}(f^{-1}(x)-x)=\sqrt{2}[e^x(x^2-2x+3)-x],\ x\in\mathbb{R}$$

θα έχουμε ότι η $h(x)$ είναι παραγωγίσμη (ως πράξεις παραγωγίσμων) με:

$$h'(x)=\sqrt{2}[e^x(x^2+1)-1],\ x\in\mathbb{R}$$

Έχουμε:

$$h'(x)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ μοναδικό,}$$

διότι η συνάρτηση: $\varphi(x)=e^x(x^2+1)-1$, $x\in\mathbb{R}$ είναι συνάρτηση «1-1», αφού η $\varphi'(x)=e^x(x+1)^2>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και άρα γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Τώρα έχουμε:

- Είναι:

$$x<0\Rightarrow\varphi(x)<\varphi(0)\Rightarrow\varphi(x)<0\Rightarrow e^x(x^2+1)-1<0$$

$$\Rightarrow\sqrt{2}[e^x(x^2+1)-1]<0$$

Άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$.

- Είναι:

$$x>0\Rightarrow\varphi(x)>\varphi(0)\Rightarrow\varphi(x)>0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^x(x^2+1)-1>0\Rightarrow\sqrt{2}[e^x(x^2+1)-1]>0$$

Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ και επομένως η συνάρτηση $h(x)$ (μπορεί να φανεί πιο καθαρά από τον πίνακα προσήμου της $h'(x)$) έχει ελάχιστο στο $x_0=0$, το $h(0)=\sqrt{2}(f^{-1}(0))=3\sqrt{2}$ δηλαδή $(AB)_{\min}=3\sqrt{2}$.

2ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αρχική συνάρτηση **ή** παράγουσα της f στο Δ ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει:

$$F'(x) = f(x)\ ,\ \text{για κάθε}\ x \in \Delta\ .$$

Α2.

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα **εσωτερικό** σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει **τοπικό ακρότατο** στο x_0 και είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο αυτό, τότε: $f'(x_0) = 0$.

Απόδειξη:

Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε:

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \Delta \ \text{ και } \ f(x) \leq f(x_0)\text{, για κάθε } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta). \qquad (1)$$

Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, ισχύει

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Επομένως,

— αν $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$, οπότε θα έχουμε:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \qquad (2)$$

— αν $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$, οπότε θα έχουμε:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \qquad (3)$$

Έτσι, από τις (2) και (3) έχουμε $f'(x_0) = 0$

Α3. α. Σωστό. **β.** Λάθος. **γ.** Σωστό. **δ.** Σωστό **ε.** Σωστό.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Πρέπει να ισχύει: $e^x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 2 \Leftrightarrow x \geq \ln 2$. Επομένως $D_f = [\ln 2, \ +\infty)$

Β2. Θα εξετάσουμε την μονοτονία της f. Εχουμε διαδοχικά:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow e^{x_1} < e^{x_2} \Leftrightarrow e^{x_1} - 2 < e^{x_2} - 2 \Leftrightarrow \sqrt{e^{x_1} - 2} < \sqrt{e^{x_2} - 2} \Leftrightarrow \sqrt{e^{x_1} - 2} + 3 < \sqrt{e^{x_2} - 2} + 3$$

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\ln 2, \ +\infty)$.

__Σημείωση:__ Μπορεί, πιο εύκολα, η μονοτονία της συνάρτησης f να προκύψει και ως εξής:
Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη (ως σύνθεση και πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με:

$$f'(x) = \frac{2e^x}{\sqrt{e^x - 2}}, \ x > \ln 2 \ .$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\ln 2, \ +\infty)$.

Έτσι το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $\left[f(\ln 2), \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \right)$ με

$f(\ln 2) = 3, \ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(4\sqrt{e^x - 2} + 3 \right) = +\infty$, δηλαδή το σύνολο τιμών είναι το διάστημα $[3, \ +\infty)$.

Η f δεν έχει ρίζες αφού $f(x) \geq 3$, για κάθε $x \in [\ln 2, \ +\infty)$.

B3. Για κάθε $y \in [3, \ +\infty)$ έχουμε διαδοχικά:

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = 4\sqrt{e^x - 2} + 3 \Leftrightarrow \frac{y-3}{4} = \sqrt{e^x - 2} \Leftrightarrow \left(\frac{y-3}{4} \right)^2 = e^x - 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x = \left(\frac{y-3}{4} \right)^2 + 2 \Leftrightarrow x = \ln\left[\left(\frac{y-3}{4} \right)^2 + 2 \right]$$

Επομένως:

$$f^{-1}(x) = \ln\left[\left(\frac{x-3}{4} \right)^2 + 2 \right], \ x \in [3, \ +\infty)$$

B4. Η συνάρτηση g είναι άρτια , αφού:

$$g(x) = g(-x) = \frac{1}{x^2} + 2 \text{, για κάθε } x \in \mathbb{R}^* .$$

Επομένως η g δεν είναι αντστρέψιμη.

B4. Για το πεδίο ορισμού της fog έχουμε:

$$D_{fog} = \left\{ x \in D_g \ / \ g(x) \in D_f \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R}^* \ / \ \frac{1}{x^2} + 2 \geq \ln 2 \right\} = \mathbb{R}^*$$

(αφού $\frac{1}{x^2} + 2 > 1, \ \ln 2 < 1$ είναι πάντα αληθείς)

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ έχουμε:

$$(fog)(x) = f(g(x)) = 4\sqrt{e^{\frac{1}{x^2}+3} - 2} + 2$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έχουμε αφού $x > 0$:

$$2x \ln x + \frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow 2x^2 \ln x + 1 > 0 \ ,$$

οπότε θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = 2x^2 \ln x + 1, \ x > 0 \ ,$$

Η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0, \ +\infty)$ με:

$$g'(x) = 4x\ln x + 2x = 2x\cdot(2\ln x + 1)$$

και έχουμε ($x > 0$):

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x\ln x + 2x = 2x\cdot(2\ln x + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

και

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x\cdot(2\ln x + 1) > 0 \Leftrightarrow \ln x > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x > e^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x > \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$g'(x) < 0 \Leftrightarrow 2x\cdot(2\ln x + 1) < 0 \Leftrightarrow \ln x < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x < e^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x < \frac{1}{\sqrt{e}}$$

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(0,\ \frac{1}{\sqrt{e}}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{\sqrt{e}},\ +\infty\right)$, και επειδή είναι συνεχής στο $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ παρουσιάζει στο σημείο αυτό ολικό ελάχιστο το:

$$g\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{e-1}{e} > 0\ .$$

Επομένως:

$$g(x) \geq g\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{e-1}{e} > 0 \quad \text{για κάθε} \quad x > 0\ ,$$

άρα αποδείξαμε ότι: $2x\ln x + \frac{1}{x} > 0$ για κάθε $x > 0$.

Γ2. Έχουμε:

Η f είναι και παραγωγίσιμη στο $(0,\ +\infty)$ με:

$$f'(x) = \left[(x^2+1)\cdot\ln x\right]' = 2x\ln x + x + \frac{1}{x} = x + \left(2x\ln x + \frac{1}{x}\right) > 0$$

αφού: $x > 0$ και $2x\ln x + \frac{1}{x} > 0$ από το προηγούμενο ερώτημα.

Άρα η συνεχής συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,\ +\infty)$.

Επίσης το $x = 1$ είναι προφανής λύση της εξίσωσης $f(x) = 0$, η οποία λόγω της μονοτονίας της f είναι και μοναδική.

Γ3. Έχουμε:

Η f' είναι και παραγωγίσιμη στο $(0,\ +\infty)$ με:

$$\left(2x\ln x + x + \frac{1}{x}\right)' = 2\ln x + 2 + 1 - \frac{1}{x^2} = 2\ln x + 3 - \frac{1}{x^2},\ x > 0$$

και

$$f^{(3)}(x)=\frac{2}{x}+\frac{2}{x^3}>0$$

για κάθε $x>0$.

Αφού $f^{(3)}(x)>0$ στο $(0,+\infty)$, έπεται ότι η συνεχής συνάρτηση f'' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Επίσης:

$f''\left(\frac{1}{e}\right)=1-e^2<0$ και $f''(1)=2>0$ και επειδή η f'' είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{e},\ 1\right]$,

υπάρχει, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, ένα τουλάχιστον $x_0\in\left(\frac{1}{e},\ 1\right)$ τέτοιο, ώστε $f''(x_0)=0$, το οποίο λόγω της μονοτονίας της f'' είναι μοναδικό.

Επίσης έχουμε:

$$0<x<x_0 \Leftrightarrow f''(x)<f(x_0)=0$$

και

$$x>x_0 \Leftrightarrow f''(x)>f(x_0)=0$$

Επειδή η f'' μηδενίζεται στο σημείο x_0 και εκατέρωθεν αλλάζει πρόσημα το σημείο $A\left(x_0,\ f(x_0)\right)$ είναι σημείο καμπής της C_f .

Γ4. α) Έχουμε: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\frac{1}{x}\right)\cdot\ln x=+\infty$

Άρα η C_f δεν έχει ούτε πλάγια ούτε οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(x^2+1\right)\cdot\ln x=-\infty\ ,$$

αφού:

$$\lim_{x\to0^+}\left(x^2+1\right)=1 \text{ και } \lim_{x\to0^+}\ln x=-\infty\ .$$

Άρα η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x=0$.

β) Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$E(\Omega)=\int_{\frac{1}{e}}^{e}\left|f(x)\right|dx=-\int_{\frac{1}{e}}^{1}f(x)dx+\int_{1}^{e}f(x)dx=-I_1+I_2$, όπου $I_1=\int_{\frac{1}{e}}^{1}f(x)dx$ και

$$I_2=\int_1^e f(x)dx$$

αφού , επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, είναι:

$$x>1\Rightarrow f(x)>f(1)\Rightarrow f(x)>0$$

$$\frac{1}{e}<x<1\Rightarrow f(x)<f(1)\Rightarrow f(x)<0$$

Έχουμε:

$$I_1=\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)dx=\int_{\frac{1}{e}}^{1}\left(x^2+1\right)\cdot\ln xdx=\int_{\frac{1}{e}}^{1}\left(\frac{x^3}{3}+x\right)'\ln xdx=$$

$$=\left[\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\ln x\right]_{\frac{1}{e}}^{1}-\int_{\frac{1}{e}}^{1}\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{x^3}{3}+x\right)dx=$$

$$=\frac{1}{3e^3}+\frac{1}{e}-\int_{\frac{1}{e}}^{1}\left(\frac{x^2}{3}+1\right)dx=\frac{1}{3e^3}+\frac{1}{e}-\frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{\frac{1}{e}}^{1}-\left[x\right]_{\frac{1}{e}}^{1}=$$

$$=\frac{1}{3e^3}+\frac{1}{9e^3}+\frac{2}{e}-\frac{10}{9}=\frac{4}{9e^3}+\frac{2}{e}-\frac{10}{9}$$

$$I_2=\int_1^e\left(x^2+1\right)\cdot\ln xdx=\int_1^e\left(\frac{x^3}{3}+x\right)'\ln xdx=$$

$$=\left[\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\ln x\right]_1^e-\int_1^e\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{x^3}{3}+x\right)dx=\frac{e^3}{3}+e-\int_1^e\left(\frac{x^2}{3}+1\right)dx=$$

$$=\frac{e^3}{3}+e-\frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e-\left[x\right]_1^e=\frac{2e^3}{9}+\frac{10}{9}$$

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E(\Omega)=\frac{2e^3}{9}+\frac{10}{9}-\frac{4}{9e^3}-\frac{2}{e}+\frac{10}{9}=\frac{2e^3}{9}+\frac{20}{9}-\frac{4}{9e^3}-\frac{2}{e}\quad \tau.\mu$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έχουμε διαδοχικά:

$$e^x\left(f'(x)+f''(x)-1\right)=f'(x)+xf''(x)\Leftrightarrow e^x f'(x)+e^x f''(x)-e^x=f'(x)+xf''(x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(e^x f'(x)-e^x\right)'=\left(xf'(x)\right)'\Leftrightarrow e^x f'(x)-e^x=xf'(x)+c\ (1)$$

Για $x=0$ είναι $0-1=0+c\Leftrightarrow c=-1$. Επομένως από την σχέση (1) έχουμε:

$$e^x f'(x)-e^x=xf'(x)-1\Leftrightarrow e^x f'(x)-xf'(x)=e^x-1\Leftrightarrow\left(e^x-x\right)f'(x)=e^x-1,\ x\in\mathbb{R}\ (2)$$

Θα εξετάσουμε το πρόσημο της συνάρτησης:

$$h(x)=e^x-x,\ x\in\mathbb{R}\ .$$

Η $h(x)$ είναι παραγωγίσιμη για $x\in\mathbb{R}$ (ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων για $x\in\mathbb{R}$) με $h'(x)=e^x-1,\ x\in\mathbb{R}$. Είναι:

$$h'(x)=0\Leftrightarrow x=0$$

$$h'(x)>0\Leftrightarrow e^x-1>0\Leftrightarrow x>0$$

$$h'(x)<0\Leftrightarrow e^x-1<0\Leftrightarrow x<0$$

Επειδή η συνάρτηση $h(x)$ είναι και συνεχής στο $x_0=0$ είναι :

- Γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty,0\right]$ και

- Γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$

Επομένως η $h(x)$ έχει ολικό ελάχιστο στο $x_0=0$, δηλαδή: $h(x)\geq h(0)=1>0$, $x\in\mathbb{R}$, δηλαδή $e^x-x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
Άρα από τη σχέση (2) έχουμε:

$$f'(x)=\frac{e^x-1}{e^x-x},\ x\in\mathbb{R}\ .$$

Τώρα έχουμε διαδοχικά:

$$f'(x)=\frac{e^x-1}{e^x-x}\Leftrightarrow f'(x)=\frac{\left(e^x-x\right)'}{e^x-x}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(x)=\left(\ln\left|e^x-x\right|\right)'\Leftrightarrow f(x)=\ln\left|e^x-x\right|+c_1,\ x\in\mathbb{R}$$

Για $x=0$ είναι $0=0+c_1\Leftrightarrow c_1=0$. Επομένως από την σχέση (2) έχουμε:

$$f(x)=\ln\left|e^x-x\right| \quad ή \quad (x)=\ln\left(e^x-x\right),\ x\in\mathbb{R},$$

αφού $e^x-x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δ2. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με:

$$f'(x)=\frac{e^x-1}{e^x-x},\ x\in\mathbb{R}\ .$$

Είναι:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow e^x-1=0\Leftrightarrow x=0$$

$$f'(x)>0\Leftrightarrow e^x-1>0\Leftrightarrow x>0$$

$$f'(x)<0\Leftrightarrow e^x-1<0\Leftrightarrow x<0$$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,\ +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,\ 0]$.

Έχει ολικό ελάχιστο στο σημείο $x_0=0$, το $f(0)=0$ (επειδή η f είναι και συνεχής στο 0).

Δ3. Η f' είναι παραγωγίσμη στο $\mathbb{R}$ (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με:

$$f''(x)=\frac{(2-x)e^x-1}{\left(e^x-x\right)^2},\ x\in\mathbb{R}\ .$$

Αρχικά θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση $(2-x)e^x-1$ έχει ακριβώς δύο ρίζες. Θεωρούμε τη βοηθητική συνάρτηση:

$$K(x)=(2-x)e^x-1,\ x\in\mathbb{R}$$

η οποία είναι παραγωγίσιμη (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με:

$$K'(x)=-e^x+(2-x)e^x=e^x\left(1-x\right),\ x\in\mathbb{R}\ .$$

Έχουμε:

$$K'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$$

$$K'(x)>0 \Leftrightarrow x<1$$

$$K'(x)<0 \Leftrightarrow x>1$$

Άρα η $K(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty,\ 1]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1,\ +\infty)$. Έχει ολικό μέγιστο στο σημείο $x_1=1$ το $K(1)=e-1>0$.

Θα βρούμε τις εικόνες $K\left((-\infty,1]\right)$, $K\left([1,+\infty)\right)$. Έχουμε:

$$K\left((-\infty,1]\right)=\left(\lim_{x\to-\infty}K(x),\ K(1)\right]=\left(-1,\ e-1\right]$$

$$K\left([1,+\infty)\right)=\left(\lim_{x\to+\infty}K(x),\ K(1)\right]=\left(-\infty,e-1\right]$$

αφού:

$$\lim_{x\to-\infty}K(x)=-1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[(2-x)e^x\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{2-x}{e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{-e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^{-x}}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}K(x)=-\infty$$

Επειδή $0\in\left(-1,\ e-1\right]$ και $0\in\left(-\infty,e-1\right]$ η $K(x)$ έχει μία ρίζα ξ_1 στο $(-\infty,1]$ και μία ρίζα ξ_2 στο $[1,+\infty)$, οι οποίες είναι μοναδικές, επειδή η $K(x)$ είναι «1-1» στα διαστήματα αυτά (ως γνησίως μονότονη στα διαστήματα $(-\infty,\ 1]$ και $[1,+\infty)$ αντίστοιχα). Για να αποδείξουμε όμως ότι τα σημεία $A\left(\xi_1,\ f(\xi_1)\right)$ και $B\left(\xi_2,\ f(\xi_2)\right)$ είναι σημεία καμπής της C_f πρέπει να αποδείξουμε ότι η $f''(x)$ (ισοδύναμα η $K(x)$) αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν των $\xi_1,\ \xi_2$. Έχουμε:

$$1>x>\xi_1 \Rightarrow K(x)>K(\xi_1)\Rightarrow K(x)>0\Rightarrow f''(x)>0$$

$$x<\xi_1 \Rightarrow K(x)<K(\xi_1)\Rightarrow K(x)<0\Rightarrow f''(x)<0$$

$$x>\xi_2 \Rightarrow K(x)<K(\xi_2)\Rightarrow K(x)<0\Rightarrow f''(x)<0$$

$$1<x<\xi_2 \Rightarrow K(x)>K(\xi_2)\Rightarrow K(x)>0\Rightarrow f''(x)>0$$

Επομένως η f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής τα $\xi_1\in\left(-\infty,\ 1\right]$ και $\xi_2\in\left[1,\ +\infty\right)$.

Δ4. Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$h(x)=\ln\left(e^x-x\right)-\sigma\upsilon\nu x,\ x\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right].$$

Από το θεώρημα του Bolzano έχουμε:

Η $h(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση στο $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ (ως πράξεις και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων).

- $h(0)=-1<0$

- $h\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$ (διότι $\frac{\pi}{2} > 0 \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) > f(0) = 0$, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, \ +\infty)$). Άρα $h(0) \cdot h\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$.
- Επομένως υπάρχει, τουλάχιστον ένα, $x_0 \in \left(0, \ \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε:

$$h(x_0) = 0 \Leftrightarrow \ln\left(e^{x_0} - x_0\right) - \sigma\upsilon\nu x_0 .$$

Για τη μοναδικότητα του x_0 θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση h είναι γνησίως μονότονη (ή «1-1» με τον ορισμό). Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως πράξεις και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με:

$$h'(x) = f'(x) + \eta\mu x, \ x \in \mathbb{R} .$$

Είναι $h'(x) > 0$ για κάθε $x \in \left(0, \ \frac{\pi}{2}\right)$, διότι είναι $f'(x) > 0$ και $\eta\mu x > 0$ για κάθε $x \in \left(0, \ \frac{\pi}{2}\right)$. Άρα το x_0 είναι μοναδικό.

Δ5. Έχουμε:

$$I = \int_0^1 \left(e^x - 1\right)\frac{f(x)}{e^x - x}dx = \int_0^1 \frac{e^x - 1}{e^x - x} \cdot f(x)dx = \int_0^1 f'(x) \cdot f(x)dx =$$

$$= \left[f(x) f(x) \right]_0^1 - \int_0^1 f(x) \cdot f'(x)dx$$

Επομένως:

$$I = f^2(1) - f^2(0) - I \Leftrightarrow 2I = \ln^2\left(e - 1\right) \Leftrightarrow I = \frac{\ln^2\left(e - 1\right)}{2}$$

3ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου
Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου
Α3. α. Λάθος **β.** Σωστό **γ.** Σωστό **δ.** Σωστό **ε.** Λάθος.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Για να ορίζεται η f, πρέπει: $3e^x+1>0$,που αληθεύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα, το πεδίο ορισμού της είναι $D_f=\mathbb{R}$.

Β2. Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ έχουμε:

$$x_1<x_2\Rightarrow e^{x_1}<e^{x_2}\Rightarrow 3e^{x_1}<3e^{x_2}\Rightarrow 3e^{x_1}+1<3e^{x_2}+1\Rightarrow \ln(3e^{x_1}+1)<\ln(3e^{x_2}+1)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln(3e^{x_1}+1)-2<\ln(3e^{x_2}+1)-2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα «1-1» οπότε αντιστρέφεται.

Σχόλιο: Θα μπορούσαμε να αποδείξουμε εύκολα ότι $f'(x)=\dfrac{3e^x}{3e^x+1}>0,\ x\in\mathbb{R}$,

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα «1-1» οπότε αντιστρέφεται.

Β3. Έχουμε:

$$f(x)=y\Leftrightarrow y+2=\ln(3e^x+1)\Leftrightarrow e^{y+2}=3e^x+1\Leftrightarrow e^x=\frac{e^{y+2}-1}{3},\quad \frac{e^{y+2}-1}{3}>0$$

Οπότε: $x=\ln\dfrac{e^{y+2}-1}{3},\ y>-2$. Άρα: $f^{-1}(x)=\ln\dfrac{e^{y+2}-1}{3},\ x>-2$

Β4. Έχουμε:

$$f(x)<f(\ln 5-2)-2\Leftrightarrow \ln(3e^x+1)-2<\ln\frac{e^{\ln 5}-1}{3}-2\Leftrightarrow \ln(3e^x+1)<\ln\frac{4}{3}\Leftrightarrow 3e^x+1<\frac{4}{3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9e^x+3<4\Leftrightarrow 9e^x<1\Leftrightarrow e^x<\frac{1}{9}\Leftrightarrow x<-\ln 9$$

Επειδή όμως $x\in(-2,\ +\infty)$ η εξίσωση είναι αδύνατη.

ΘΕΜΑ Γ

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $(-1,+\infty)$.

Γ1. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη (ως αποτέλεσμα πράξεων δύο φορές παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με:

$$f'(x)=e^x-\frac{1}{x+1},\quad f''(x)=e^x+\frac{1}{(x+1)^2}$$

Επειδή $f''(x)>0$ για κάθε $x>-1$, έπεται ότι η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-1,+\infty)$.

Επίσης $f''(0)=0$, άρα

$$-1<x<0 \Leftrightarrow f'(x)<f'(0) \Leftrightarrow f'(x)<0 \text{, για κάθε } x\in(-1,0)$$

$$x>0 \Leftrightarrow f'(x)>f'(0) \Leftrightarrow f'(x)>0 \text{, για κάθε } x\in(0,+\infty)$$

Επιπλέον $f(0)=0$ και έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

x	-1		0		+∞
f′(x)		-	0	+	
f(x)		↘	0	↗	

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, οπότε παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x=0$ το $f(0)=0$.

Γ2. α. Έχουμε:

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}\left[e^x-\ln(x+1)-1\right]=+\infty \text{, αφού}$$

$\lim\limits_{x\to -1^+}\ln(x+1)=\lim\limits_{u\to 0^+}\ln u=-\infty$, όπου: $\begin{array}{c} u=x+1 \\ x\to -1^+ \Leftrightarrow u\to 0^+ \end{array}$ και $\left[e^x-1\right]=\dfrac{1}{e}-1$.

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $[0,+\infty)$.

Η εξίσωση $f(x)=0$ έχει στο πεδίο ορισμού της $(-1,+\infty)$, μοναδική λύση την $x=0$, αφού:

$$x<0 \Leftrightarrow f(x)>f(0)=0$$

$$x>0 \Leftrightarrow f(x)<f(0)=0$$

β. Αναζητούμε τις ασύμπτωτες της f

__**Κατακόρυφες**:__ Επειδή:

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}\left(e^x-\ln(x+1)-1\right)=+\infty \ ,$$

η ευθεία $x=-1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

__**Οριζόντιες:**__ Η C_f **δεν** έχει οριζόντια ασύμπτωση αφού:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\left(e^x-\ln(x+1)-1\right)=\lim_{x\to +\infty} e^x\left(1-\frac{\ln(x+1)}{e^x}-\frac{1}{e^x}\right)=(+\infty)\cdot 1=+\infty$$

, διότι είναι:

$$\lim_{x\to +\infty} e^x=+\infty,\ \lim_{x\to +\infty}\frac{\ln(x+1)}{e^x}=\left(\frac{0}{0}-D,L\right)=\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{x+1}}{e^x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{(x+1)e^x}=\frac{1}{+\infty}=0,\ \lim_{x\to +\infty}\frac{1}{e^x}=0$$

__**Πλάγιες:**__ Επειδή:

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x - \ln(x+1) - 1}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\left(1 - \dfrac{\ln(x+1)}{e^x} - \dfrac{1}{e^x}\right)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}\cdot\lim_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{\ln(x+1)}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right) = (+\infty)\cdot 1 = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1} = +\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{\ln(x+1)}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right) = 1 - 0 - 0 = 1$$

Η C_f **δεν** έχει πλάγιες ασύμπτωτες

Γ3. Η δοσμένη σχέση γίνεται ισοδύναμα:

$$e^{2a+\beta-1} - \ln(2a+\beta) + e^{a+2\beta-2} - \ln(a+2\beta-1) \le 2 \Leftrightarrow$$

$$e^{2a+\beta-1} - \ln\big((2a+\beta-1)+1\big) - 1 + e^{a+2\beta-2} - \ln\big((a+2\beta-2)+1\big) - 1 \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(2a+\beta-1) + f(a+2\beta-2) \le 0 \ \ (1)$$

Από την τελευταία σχέση έπεται ότι:

$$f(2a+\beta-1) = f(a+2\beta-2) = 0\ ,\ (2)$$

γιατί αν υποθέσουμε ότι π.χ. $f(2a+\beta-1) \ne 0$ τότε, επειδή:

$f(x) \ge 0$ για κάθε $x > -1$, θα πρέπει $f(2a+\beta-1) > 0$ και η (1) μας δίνει:

$$f(a+2\beta-2) \le -f(2a+\beta-1) < 0 \Rightarrow f(a+2\beta-2) < 0$$

το οποίο είναι άτοπο. Επομένως $f(2a+\beta-1) = 0$ (2) οπότε από την (1) και $f(a+2\beta-2) = 0$

.

Έχουμε ότι:

$$\begin{cases} 2a+\beta-1 = 0 \\ a+2\beta-2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 1 \end{cases}.$$

Γ4. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$\mathrm{E}(\Omega) = \int_0^1 |f(x)|dx = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \big(e^x - \ln(x+1) - 1\big)dx =$$

$$= \int_0^1 e^x dx - \int_0^1 \ln(x+1)dx - \int_0^1 1dx = \left[e^x\right]_0^1 - \left[x\ln(x+1)\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{x}{x+1}dx - \left[x\right]_0^1 =$$

$$= e - 1 - \ln 2 + I - 1 = e - 2 - \ln 2 + I$$

$$I = \int_0^1 \frac{x}{x+1}dx = \int_0^1 \frac{x+1-1}{x+1}dx = \int_0^1 1dx - \int_0^1 \frac{1}{x+1}dx = \left[x\right]_0^1 - \left[\ln(x+1)\right]_0^1 = 1 - \ln 2$$

Επομένως: $\mathrm{E}(\Omega) = e - 2 - \ln 2 + 1 - \ln 2 = e - 1 - 2\ln 2\ \ \tau.\mu$

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. Έχουμε διαδοχικά:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1 + x\ln x}{x\ln x} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x\ln x} + 1 \Leftrightarrow \ln|f(x)| = \left[\ln(\ln x)\right]' + (x)' \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\ln|f(x)|\right]' = \left[\ln(\ln x) + x\right]' \Leftrightarrow \ln|f(x)| = \ln(\ln x) + x + c$$

Για $x = e$ έχουμε:

$$\ln\left|f(e)\right| = \ln(\ln e) + e + c \Rightarrow \ln e^e = e + c \Rightarrow e = e + c \Rightarrow c = 0$$

Επομένως:

$$\ln\left|f(x)\right| = \ln(\ln x) + x \ \ (1).$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $(1,\ +\infty)$ (ως παραγωγίσιμη στο $(1,\ +\infty)$) και δεν έχει ρίζες αφού $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in (1,\ +\infty)$, η συνάρτηση f θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(1,\ +\infty)$ και αφού $f(e) = e^e > 0$ θα είναι $f(x) > 0$, για κάθε $x \in (1,\ +\infty)$.

Άρα από την σχέση (1) έχουμε:

$$\ln f(x) = \ln(\ln x) + x \Leftrightarrow \ln f(x) = \ln(\ln x) + \ln e^x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln f(x) = \ln\left(e^x \cdot \ln x\right) \Leftrightarrow f(x) = e^x \cdot \ln x,\ x > 1$$

Θα αποδείξουμε τώρα ότι οι συναρτήσεις:

$$g(x) = e^x,\ h(x) = \ln x$$

δεν έχουν κοινό σημείο, δηλαδή ότι η εξίσωση:

$$g(x) = h(x) \Leftrightarrow e^x = \ln x \Leftrightarrow e^x - \ln x = 0 \ \text{ δεν έχει ρίζα στο } (1,\ +\infty)$$

Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$K(x) = e^x - \ln x,\ x \geq 1 \ ,$$

η οποία είναι παραγωγίσιμηστο $[1,\ +\infty)$ (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $[1,\ +\infty)$) με:

$$K'(x) = e^x - \frac{1}{x},\ x \geq 1 \ .$$

Η συνάρτηση $K'(x)$ είναι επίσης παραγωγίσιμη στο $[1,\ +\infty)$ (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $[1,\ +\infty)$) με:

$$K''(x) = e^x + \frac{1}{x^2} > 0,\ x \geq 1 \ .$$

Άρα η $K'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,\ +\infty)$. Άρα:

$$x > 1 \Rightarrow K'(x) > K'(1) = e - 1 \Rightarrow K'(x) > 0,\ x > 1$$

Επομένως η συνάρτηση $K(x)$ είναι είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,\ +\infty)$. Άρα:

$$x > 1 \Rightarrow K(x) > K(1) = e > 0 \Rightarrow K(x) > 0,\ x > 1$$

Οπότε η συνάρτηση $K(x)$ δεν έχει ρίζα στο $(1,\ +\infty)$, δηλαδή ισοδύναμα οι συναρτήσεις $g(x) = e^x,\ h(x) = \ln x$ δεν έχουν κοινό σημείο στο $(1,\ +\infty)$.

Δ2. α) Η συνάρτηση:

$$f(x) = e^x \cdot \ln x,\ x > 1$$

είναι παραγωγίσιμη στο $(1,\ +\infty)$ (ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $(1,\ +\infty)$) με:

$$f'(x)=e^x\ln x+e^x\cdot\frac{1}{x}>0 \text{ , για κάθε } x>1$$

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα $(1,\ +\infty)$. Για το σύνολο τιμών της έχουμε:

$$f\left((1,\ +\infty)\right)=\left(\lim_{x\to 1^+}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right),$$

αφού η f είναι γνησίως αύξουσα $(1,\ +\infty)$.

Είναι:

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(e^x\cdot\ln x\right)=0,\quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(e^x\cdot\ln x\right)=+\infty$$

Αρα: $f\left((1,\ +\infty)\right)=\left(0,\ +\infty\right)$

β) Έχουμε:

$$f(x)=\frac{\lambda}{x}\Leftrightarrow xf(x)=\lambda\Leftrightarrow\varphi(x)=\lambda\ ,\quad x>1\ ,$$

όπου $\varphi(x)=xf(x),\ x>1$

η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(1,\ +\infty)$ (ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $(1,\ +\infty)$) με:

$$\varphi'(x)=f(x)+xf'(x)=e^x\ln x+x\left(e^x\ln x+e^x\cdot\frac{1}{x}\right)=,$$

$$=e^x\ln x+xe^x\ln x+e^x=e^x\left(\ln x+x\ln x+1\right)>0$$

για κάθε $x\in(1,\ +\infty)$.

Άρα η συνάρτηση $\varphi(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(1,\ +\infty)$ και επομένως το σύνολο τιμών της είναι

$$\varphi\left((1,\ +\infty)\right)=\left(\lim_{x\to 1^+}\varphi(x),\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)\right)=\left(0,\ +\infty\right)$$

, αφού:

$$\lim_{x\to 1^+}\varphi(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(xf(x)\right)=0,\quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(xf(x)\right)=+\infty$$

Άρα:

- Αν $\lambda\le 0$ η εξίσωση $f(x)=\dfrac{\lambda}{x}$ δεν έχει ρίζα στο $(1,\ +\infty)$
- Αν $\lambda>0$ η εξίσωση $f(x)=\dfrac{\lambda}{x}$ έχει μοναδική ρίζα στο $(1,\ +\infty)$, αφού είναι «1-1» στο $(1,\ +\infty)$ (ως γνησίως αύξουσα στο $(1,\ +\infty)$).

Δ3. Η συνάρτηση $f'(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(1,\ +\infty)$ (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $(1,\ +\infty)$) με:

$$f''(x)=e^x\ln x+e^x\cdot\frac{1}{x}+e^x\cdot\frac{1}{x}-e^x\frac{1}{x^2}=e^x\ln x+2e^x\cdot\frac{1}{x}-e^x\frac{1}{x^2}=$$

$$e^x\left(\ln x+2\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=e^x\left(\frac{x^2\ln x+2x-1}{x^2}\right)>0,\ x>1$$

Αφού για κάθε $x\in(1,\ +\infty)$ είναι :

$$e^x>0$$

$$x^2>0$$

$$x^2\ln x+2x-1>0\left(x^2\ln x>0,\ 2x-1>0\right)$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $(1,\ +\infty)$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A\left(e,\ f(e)\right)$ είναι:

$$y-e^e=\left(e^e+e^{e-1}\right)(x-e)\Leftrightarrow y=\left(e^e+e^{e-1}\right)x-e^{e+1}-e^e+e^e\Leftrightarrow y=\left(e^e+e^{e-1}\right)x-e^{e+1}$$

, αφού $f'(e)=e^e+e^{e-1}$

Δ4. α) Αφού η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $(1,\ +\infty)$ η γραφική της παράσταση θα βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη (στο σημείο επαφής Α ισχύει η ισότητα). Επομένως θα έχουμε:

,

για κάθε $x>1$

$$f(x)\ge\left(e^e+e^{e-1}\right)x-e^{e+1}\Leftrightarrow f(x)\ge e^{e-1}(e+1)x-e^{e+1}\Leftrightarrow\frac{f(x)}{e^{e-1}}\ge(e+1)x-\frac{e^{e+1}}{e^{e-1}}\Leftrightarrow\frac{f(x)}{e^{e-1}}\ge(e+1)x-e^2$$

β) Ολοκληρώνοντας[3] την προηγούμενη ανισοισότητα έχουμε:

$$\int_2^3\frac{f(x)}{e^{e-1}}dx\ge\int_2^3\left[(e+1)x-e^2\right]dx\Leftrightarrow\frac{1}{e^{e-1}}\int_2^3 f(x)dx\ge(e+1)\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^3-e^2\left[x\right]_2^3\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{e^{e-1}}\int_2^3 f(x)dx\ge(e+1)\left(\frac{9}{2}-\frac{4}{2}\right)-e^2(3-2)\Leftrightarrow\frac{1}{e^{e-1}}\int_2^3 f(x)dx\ge\frac{5}{2}(e+1)-e^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{e^{e-1}}\int_2^3 f(x)dx\ge\frac{5+5e-2e^2}{2}\Leftrightarrow\int_2^3 f(x)dx\ge e^{e-1}\cdot\frac{5+5e-2e^2}{2}$$

Δ5. Επειδή η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $(1,\ +\infty)$ (προηγούμενο ερώτημα) η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,\ +\infty)$. Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ. του διαφορικού λογισμού στα διαστήματα $\left[x_1,\ \frac{x_1+x_2}{2}\right]$ και $\left[\frac{x_1+x_2}{2},\ x_2\right]$, αντίστοιχα, αφού πληρούνται οι προϋποθέσεις (η f είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής στα $\left[x_1,\ \frac{x_1+x_2}{2}\right]$ και $\left[\frac{x_1+x_2}{2},\ x_2\right]$).

Επομένως υπάρχουν $\xi_1 \in \left(x_1, \dfrac{x_1+x_2}{2} \right)$ και $\xi_2 \in \left(\dfrac{x_1+x_2}{2}, x_2 \right)$ τέτοια, ώστε:

$$f'\left(\xi_1\right) = 2\frac{f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$f'\left(\xi_2\right) = 2\frac{f(x_2) - f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)}{x_2 - x_1}$$

$$\xi_1 < \xi_2 \Rightarrow f'\left(\xi_1\right) < f'\left(\xi_2\right) \Rightarrow 2\frac{f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 2\frac{f(x_2) - f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)}{x_2 - x_1} \Rightarrow$$

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - f(x_1) < f(x_2) - f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \Rightarrow f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

$4^{ο}$ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a,\beta]$, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β) και επιπλέον:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \;\; και \;\; \lim_{x\to \beta^-} f(x) = f(\beta)$$

Α2.

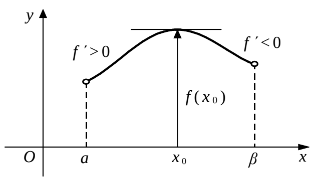
Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f .

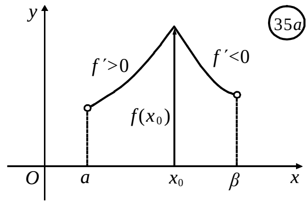
Α3. Επειδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$. Έτσι έχουμε:

$$f(x) \le f(x_0) \text{ , για κάθε } x \in (\alpha, x_0] \quad (1)$$

Επειδή $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (x_0, \beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0, \beta)$. Έτσι έχουμε:

$$f(x) \le f(x_0) \text{ , για κάθε } x \in [x_0, \beta) . \; (2)$$





35α

Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει:

$$f(x) \le f(x_0) \text{ , για κάθε } x \in (\alpha, \beta) \;,$$

που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (α, β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

Α4.

α. Σωστό (αφού η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[a,\beta]$ άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [a,\beta]$ ή $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [a,\beta]$. Επομένως $\int_a^\beta f(x)dx > 0$ ή $\int_a^\beta f(x)dx < 0$).

β. Λάθος (είναι (B, A) αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα)

γ. Σωστό

δ. Σωστό (αφού η f' συνεχής στο $\mathbb{R}$ και χωρίς ρίζες θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$, επομένως είναι ή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή γνησίως αύξουσα, ή $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή γνησίως φθίνουσα).

ε. Σωστό (αν $x_1 \in \mathbb{R}$ θέση τοπικού ακροτάτου, τότε από το θεώρημα του Fermat θα είναι $f'(x_1) = 0$, δηλαδή η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(x_1, f(x_1))$ είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$ -οριζόντια εφαπτομένη).

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $x_0 = 0$. Επομένως:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$$

Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{2x+\kappa\eta\mu x}{x-x^2} = \lim_{x\to 0^-} \frac{2+\kappa\dfrac{\eta\mu x}{x}}{1-x} = \frac{2+\kappa}{1} = 2+\kappa$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\sqrt{8x^2+x+16}-3x\right) = 4$$

$$f(0) = \lambda$$

Άρα: $\lambda = 4,\ 2+\kappa = 4 \Leftrightarrow \kappa = 2$

Β2. Για $\kappa = 2,\ \lambda = 4$ έχουμε:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+2\eta\mu x}{x-x^2}, & x<0 \\ 4, & x=0 \\ \sqrt{8x^2+x+16}-3x, & x>0 \end{cases}$$

οπότε:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{8x^2+x+16}-3x\right) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{8+\frac{1}{x}+\frac{16}{x^2}}-3\right) = (+\infty)\cdot\left(\sqrt{8}-3\right) = +\infty$$

Β3. Είναι:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+\eta\mu x}{x-x^2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2+\dfrac{\eta\mu x}{x}}{1-x} = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{1-x}\cdot\left(2+\frac{\eta\mu x}{x}\right)\right] = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1-x}\cdot\lim_{x\to-\infty}\left(2+\frac{\eta\mu x}{x}\right) = 0\cdot 2 = 0$$

αφού τα όρια $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{1-x}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2+\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)$ με $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{1-x} = 0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2+\dfrac{\eta\mu x}{x}\right) = 2$

[διότι: $\left|\dfrac{\eta\mu x}{x}\right| \le \dfrac{1}{|x|} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{x} \le \dfrac{\eta\mu x}{x} \le \dfrac{1}{x}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{1}{x}\right) = 0$] και από το κριτήριο της παρεμβολής είναι:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(2+\frac{\eta\mu x}{x}\right) = 2$$

Β4. Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = f(x) - \ln(8x+1),\ x\in[0,1]$$

Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ ((ως σύνθεση και αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων στο $[0,1]$)

Επίσης:

$$g(0) = f(0) = 4$$

$$g(1) = f(1) - 2\ln 9 = 2 - 2\ln 9 = 2\ln\frac{e}{9}$$

Άρα, από το θεώρημα Bolzano, έχουμε ότι η εξίσωση:

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 2\ln(8x+1)$$

έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(0,1)$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $(0,+\infty)$) με:

$$g'(x) = 2f(x) + 2xf'(x) + 2xf'(x) + x^2 f''(x) - 2\ln x - 1 - 2 =$$

$$= 2f(x) + 4xf'(x) + x^2 f''(x) - 2\ln x - 3 = 0$$

,

λόγω της δεδομένης σχέσης. Επομένως η συνάρτηση g είναι σταθερή, δηλαδή $g(x) = c \in \mathbb{R}$, για κάθε $x > 0$.

Γ2. Αφού από το ερώτημα Δ1 η συνάρτηση g είναι σταθερή θα υπάρχει $c \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει $g(x) = c$.

Για $x = 1 \Rightarrow g(1) = c \Rightarrow 2f(1) + f'(1) - 1 = c \Rightarrow c = 0$.

Επομένως έχουμε διαδοχικά:

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow 2xf(x) + x^2 f'(x) - x(2\ln x + 1) = 0 \Leftrightarrow 2xf(x) + x^2 f'(x) = x(2\ln x + 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2xf(x) + x^2 f'(x) = 2x\ln x + x \Leftrightarrow \left[x^2 f(x)\right]' = \left[x^2 \ln x\right]' \Leftrightarrow x^2 f(x) = x^2 \ln x + c_1 \;\; (c_1 \in \mathbb{R})$$

Για $x = 1 \Rightarrow f(1) = 0 + c_1 \Rightarrow c_1 = 0$

Επομένως:

$$x^2 f(x) = x^2 \ln x \Leftrightarrow f(x) = \ln x, \; x > 0$$

Γ3. α). Έστω $A(x_0,\, f(x_0))$ το σημείο επαφής της γραφικής παράστασης C_f της f με την εφαπτομένη της (ε) που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με: $f'(x) = \frac{1}{x},\; x > 0$. Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) στο Α είναι:

$$(\varepsilon): y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - \ln x_0 = \frac{1}{x_0}(x - x_0)$$

Αφού η (ε) διέρχεται από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ έχουμε:

$$0 - \ln x_0 = \frac{1}{x_0}(0 - x_0) \Leftrightarrow -\ln x_0 = -1 \Leftrightarrow \ln x_0 = 1 \Leftrightarrow x_0 = e$$

Επομένως η ζητούμενη εξισωση είναι:

$$y - f(e) = f'(e)\left(x-e\right) \Leftrightarrow y-1=\frac{1}{e}\left(x-e\right) \Leftrightarrow y=\frac{1}{e}x$$

β) Έχουμε:

$$y(t) = \left(fof\right)(x(t)) = f\left(f(x(t))\right) = \ln\left(\ln(x(t)\right),\ t>0,\ x(t)>1$$

Η συνάρτηση $y(t)$ είναι παραγωγίσιμη για κάθε($t>0$ ως συνθέσεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων για $t>0$) με:

$$y'(t) = \frac{1}{\ln(x(t)}\cdot\left(\ln(x(t)\right)' = \frac{1}{\ln(x(t)}\cdot\frac{1}{x(t)}\cdot x'(t),\ t>0$$

Τη χρονική στιγμή $t=t_0$ sec είναι:

$$t=t_0 \Rightarrow y'(t_0) = \frac{1}{\ln(x(t_o)}\cdot\frac{1}{x(t_0)}\cdot x'(t_0) = \frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2\ln 2}\ cm/\sec$$

Γ4. Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$K(x) = \ln\left(\left|f(x)\right|\right),\ x\in\left(0,\ \frac{1}{e}\right].$$

Η $K(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,\ \frac{1}{e}\right]$ (ως συνθέσεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\left(0,\ \frac{1}{e}\right]$) με $K'(x)=\frac{1}{x\ln x}$, $\mathrm{x}\in\left(0,\ \frac{1}{e}\right]$.

Η $K'(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,\ \frac{1}{e}\right]$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συνατήσεων στο $\left(0,\ \frac{1}{e}\right]$) με :

$$K''(x) = \frac{-(1+\ln x)}{x^2\ln^2 x} > 0 \text{, για κάθε } \left(0,\ \frac{1}{e}\right) \text{ (είναι}$$

$$x<\frac{1}{e} \Leftrightarrow \ln x < \ln\frac{1}{e} \Leftrightarrow \ln x < -1 \Leftrightarrow \ln x + 1 < 0 \text{).}$$

Άρα η $K'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(0,\ \frac{1}{e}\right]$, δηλαδή η Κ είναι κυρτή στο $\left(0,\ \frac{1}{e}\right]$.

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού στα διαστήματα $\left[a,\ \frac{a+\beta}{2}\right]$ και $\left[\frac{a+\beta}{2},\ \beta\right]$ αντίστοιχα αφού:

Η συνάρτηση $K(x)$ είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $\left[a,\ \frac{a+\beta}{2}\right]$ και $\left[\frac{a+\beta}{2},\ \beta\right]$ (άρα και συνεχής σε αυτά). Επομένως, υπάρχουν αντίστοιχα $\xi_1 \in \left(a,\ \frac{a+\beta}{2}\right)$ και $\xi_2 \in \left(\frac{a+\beta}{2},\ \beta\right)$ τέτοια, ώστε:

$$K'(\xi_1) = 2\frac{K\left(\frac{a+\beta}{2}\right) - K(a)}{\beta - \alpha} \quad \text{και} \quad K'(\xi_2) = 2\frac{K(\beta) - K\left(\frac{a+\beta}{2}\right)}{\beta - \alpha}.$$

Έχουμε διαδοχικά:

$$\xi_1 < \xi_2 \Rightarrow K'(\xi_1) < K'(\xi_2) \Rightarrow 2\frac{K\left(\frac{a+\beta}{2}\right) - K(a)}{\beta - \alpha} < 2\frac{K(\beta) - K\left(\frac{a+\beta}{2}\right)}{\beta - \alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K\left(\frac{a+\beta}{2}\right) - K(a) < K(\beta) - K\left(\frac{a+\beta}{2}\right) \Rightarrow 2K\left(\frac{a+\beta}{2}\right) < K(a) + K(\beta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\ln\left(\left|f\left(\frac{a+\beta}{2}\right)\right|\right) < \ln|f(a)| + \ln|f(\beta)| \Rightarrow \ln\left(\left|f\left(\frac{a+\beta}{2}\right)\right|\right)^2 < \ln\left(|f(a)|\cdot|f(\beta)|\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\left|f\left(\frac{a+\beta}{2}\right)\right|\right)^2 < |f(a)|\cdot|f(\beta)| \Rightarrow \left|f\left(\frac{a+\beta}{2}\right)\right| < \sqrt{|f(a)|\cdot|f(\beta)|} \Rightarrow \left|f\left(\frac{a+\beta}{2}\right)\right| < \sqrt{f(a)\cdot f(\beta)}$$

$$(\alpha\varphi o\acute{\upsilon}\, f(a) < 0,\ f(\beta) < 0, \delta\iota\acute{o}\tau\iota\ \alpha, \beta \in \left(0,\ \frac{1}{e}\right))$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με:

$$f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1 > 0,\ x \in \mathbb{R},$$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα, δηλαδή είναι «1-1» οπότε η f αντιστρέφεται.

β) Έχουμε διαδοχικά:

$$e^{5x} + e^{3x+2} + e^{x+4} \geq e^5 \cdot x\left(x^4 + x^2 + 1\right) \Leftrightarrow \frac{e^{5x} + e^{3x+2} + e^{x+4}}{e^5} \geq x^5 + x^3 + x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{5(x-1)} + e^{3(x-1)} + e^{x-1} \geq x^5 + x^3 + x \Leftrightarrow f(e^{x-1}) \geq f(x) \Leftrightarrow e^{x-1} \geq x$$

Η τελευταία σχέση αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αφού:

- Για $x > 0$ γίνεται $x - 1 \geq \ln x$ (αληθής με χρήση της εφαρμογής 2,ii) στη σελίδα 266 του σχολικού βιβλίου).
- Για $x \leq 0$, είναι προφανής, αφού $e^{x-1} > 0$.

Επομένως, οι λύσεις της δοθείσας ανίσωσης είναι όλα τα $x \in \mathbb{R}$.

Σημείωση: Μπορούμε να θεωρήσουμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = e^{x-1} - x,\ x \in \mathbb{R}$$

και να μελετήσουμε την μονοτονία και τα ακρότατά της, οπότε αποδυκνείουμε ότι:

$$g(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^{x-1} \geq x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Επομένως, οι λύσεις της δοθείσας ανίσωσης είναι όλα τα $x \in \mathbb{R}$.

Δ2.

α) Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$K(x) = f(x) - 1,\ x \in [0,1].$$

- Η συνάρτηση $K(x)$ είναι συνεχής στο $[0,1]$ (ως πολυωνυμική).
- $\begin{matrix} K(0) = f(0) - 1 = -1 < 0 \\ K(1) = f(1) - 1 = 2 > 0 \end{matrix}$, άρα $K(0)\cdot K(1) < 0$

Επομένως, από το Θεώρημα του Bolzano, υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε:

$$K(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = 1\ .$$

Επειδή η f είναι συνάρτηση «1-1» το x_0 είναι μοναδικό.

β) Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$h(x) = 2x^6 + 3x^4 + 6x^2 - 12x,\ x \in \mathbb{R}$$

και έτσι θέλουμε ισοδύναμα να λύσουμε την ανίσωση:

$$2x^6 + 3x^4 + 6x^2 - 12x \geq 2x_0^6 + 3x_0^4 + 6x_0^2 - 12x_0 \Leftrightarrow h(x) \geq h(x_0) \quad \text{(I)}$$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως πολυωνυμική) με:

$$h'(x) = 12x^5 + 12x^3 + 12x - 1 = 12\left[\left(x^5 + x^3 + x\right) - 1\right] = 12(f(x) - 1),\ x \in \mathbb{R}$$

Έχουμε:

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow 12(f(x) - 1) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 1 \Leftrightarrow x = x_0 \in (0,1)$$

$$x > x_0 \Leftrightarrow f(x) > f(x_0) \Leftrightarrow f(x) > 1 \Leftrightarrow f(x) - 1 > 0 \Leftrightarrow h'(x) > 0$$

$$0 < x < x_0 \Leftrightarrow f(x) < f(x_0) \Leftrightarrow f(x) < 1 \Leftrightarrow f(x) - 1 < 0 \Leftrightarrow h'(x) < 0$$

Επομένως η συνάρτηση h παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x = x_0$ και άρα είναι $h(x) \geq h(x_0)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως, το σύνολο λύσεων της ανίσωσης είναι το $\mathbb{R}$.

<u>2ος τρόπος (Δ2 β)</u>

Έχουμε ισοδύναμα:

$$2x^6 + 3x^4 + 6x^2 - 12x \geq 2x_0^6 + 3x_0^4 + 6x_0^2 - 12x_0 \Leftrightarrow \frac{x^6}{6} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} - x \geq \frac{x_0^6}{6} + \frac{x_0^4}{4} + \frac{x_0^2}{2} - x_0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$F(x) = \frac{x^6}{6} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2},\ x \in \mathbb{R}\ ,$$

η οποία είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, αφού η F είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως πολυωνυμική) με:

$$F'(x) = x^5 + x^3 + x = f(x),\ x \in \mathbb{R}$$

$$F''(x) = f'(x) > 0,\ x \in \mathbb{R}$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_F της F στο σημείο της $A\left(x_0, F(x_0)\right)$ είναι:

$$y - F(x_0) = F'(x_0)\left(x - x_0\right) \Rightarrow y = F(x_0) + F'(x_0)\left(x - x_0\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = F(x_0) + f(x_0)\left(x - x_0\right) \Rightarrow y = F(x_0) + \left(x - x_0\right)$$

Αφού η F είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, έχουμε διαδοχικά:

$$F(x) \geq y \Leftrightarrow F(x) \geq F(x_0) + \left(x - x_0\right) \Leftrightarrow F(x) - x \geq F(x_0) - x_0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^6}{6} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} - x > \frac{x_0^6}{6} + \frac{x_0^4}{4} + \frac{x_0^2}{2} - x_0,\ x \in \mathbb{R}$$

Επομένως, το σύνολο λύσεων της ανίσωσης (I) είναι το $\mathbb{R}$

Δ3. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $\left[\xi_1 + 1,\ \xi_2 + 1\right]$ και επειδή τη f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, έχουμε:

$$\xi_1 + 1 \leq t \leq \xi_2 + 1 \Rightarrow f\left(\xi_1 + 1\right) \leq f(t) \leq f\left(\xi_2 + 1\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int_{\xi_1+1}^{\xi_2+1} f\left(\xi_1 + 1\right) dt \leq \int_{\xi_1+1}^{\xi_2+1} f(t)dt \leq \int_{\xi_1+1}^{\xi_2+1} f\left(\xi_2 + 1\right) dt \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f\left(\xi_1 + 1\right)\left(\xi_2 - \xi_1\right) \leq \int_{\xi_1+1}^{\xi_2+1} f(t)dt \leq f\left(\xi_2 + 1\right)\left(\xi_2 - \xi_1\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f\left(\xi_1 + 1\right) \leq \frac{\int_{\xi_1+1}^{\xi_2+1} f(t)dt}{\xi_2 - \xi_1} \leq f\left(\xi_2 + 1\right)\ (II)$$

Τώρα έχουμε:

$$0 < \xi_1 < \xi_2 < 1 \Rightarrow 1 < \xi_1 + 1 < \xi_2 + 1 < 2 \Rightarrow f(1) < f\left(\xi_1 + 1\right) < f\left(\xi_2 + 1\right) < f(2)$$
$$\Rightarrow 3 < f\left(\xi_1 + 1\right) < f\left(\xi_2 + 1\right) < 42\ (III)$$

Επομένως, από τη σχέση (II),λόγω της σχέσης (III) προκύπτει ότι: $3 \leq \dfrac{\int_{\xi_1+1}^{\xi_2+1} f(t)dt}{\xi_2 - \xi_1} \leq 42$

Δ4.

α) Ισχύει ότι $e^{x-1} \geq x,\ x \in \mathbb{R}$ (ερώτημα Δ1,ii). Αν θέσουμε όπου x το $x^2 + 1$ έχουμε:

$$e^{x^2} \geq x^2 + 1 \Leftrightarrow e^{x^2} - x^2 - 1 \geq 0 \quad \text{(IV)},$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Η συνάρτηση: $\varphi(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$ είναι συνεχής στο διάστημα $\left[0,1\right]$ (ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων στο $\left[0,1\right]$) και επίσης δεν είναι παντού μηδέν στο $\left[0,1\right]$.

Ολοκληρώνοντας την σχέση (IV) έχουμε διαδοχικά:

$$\int_0^1 \left(e^{x^2} - x^2 - 1\right) dx > 0 \Rightarrow \int_0^1 e^{x^2} dx - \int_0^1 x^2 dx - \int_0^1 1 dx \Rightarrow \int_0^1 e^{x^2} dx > \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[x\right]_0^1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int_0^1 e^{x^2} dx > \frac{1}{3} + 1 \Rightarrow \int_0^1 e^{x^2} dx > \frac{4}{3} \Rightarrow 3\int_0^1 e^{x^2} dx > 4$$

β) Θέτουμε $f^{-1}(x) = u$ και έχουμε:

$$f^{-1}(x) = u \Leftrightarrow x = f(u)$$

$$dx = f'(u)du$$

$$x = 0 \Leftrightarrow f(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$$

$$x = 1 \Leftrightarrow f(u) = 1 \Leftrightarrow u = x_0$$

$$u \in [0, x_0] \subseteq [0,1] \Rightarrow u \geq 0$$

Επομένως, το ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι:

$$\int_0^1 \left| f^{-1}(x) \right| dx = \int_0^{x_0} |u| f'(u)du = \int_0^{x_0} u f'(u)du = \int_0^{x_0} u\left(5u^4 + 3u^2 + 1\right)du =$$

$$= \int_0^{x_0} \left(5u^5 + 3u^3 + u\right) du = \left[\frac{5u^6}{6} + \frac{3u^4}{4} + \frac{u^2}{2}\right]_0^{x_0} = \frac{5x_0^{\;6}}{6} + \frac{3x_0^{\;4}}{4} + \frac{x_0^{\;2}}{2}$$

5ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω f μια συνάρτηση και $A\left(x_0,\ f(x_0)\right)$ ένα σημείο της C_f. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι ένας πραγματικός αριθμός λ, τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της Α, την ευθεία ε που διέρχεται από το Α και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ.
Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο Α(x_0, f(x_0)) είναι:

$$y-f(x_0)=\lambda(x-x_0)\ ,\quad \lambda=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Α2. Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες όταν:

● έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού Α και
● για κάθε $x\in A$ ισχύει $f(x)=g(x)$.

Για να δηλώσουμε ότι δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες γράφουμε $f=g$.

Α3. Αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει :

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x^\nu-x_0^\nu}{x-x_0}=\frac{\left(x-x_0\right)\cdot\left(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\ldots x_0^{\nu-1}\right)}{x-x_0}=x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\ldots x_0^{\nu-1}$$

Οπότε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\left(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\ldots x_0^{\nu-1}\right)=x_0^{\nu-1}+x_0^{\nu-1}+\ldots+x_0^{\nu-1}=\nu x_0^{\nu-1}$$

Δηλαδή $(x^\nu)'=\nu x^{\nu-1}$

Α4.

α. Σωστό (πρόταση του σχολικού βιβλίου στη σελίδα 178)

β. Σωστό (η παράγωγος της f είναι παντού 0 αφού η f είναι σταθερή συνάρτηση, ως ορισμένο ολοκλήρωμα).

γ. Λάθος (όχι σε ένα τουλάχιστον σημείο αλλά σε ένα το πολύ σημείο).

δ. Λάθος (δεν ισχύει υποχρεωτικά, αφού π.χ. η συνάρτηση $f(x)=x^3,\ x\in\mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, ενώ $f'(x)=3x^2\geq 0$, δηλαδή μπορεί και να μηδενίζεται σε κάποια σημεία).

ε. Σωστό[4] (Αν έχει οριζόντια ασύμπτωτη την $y=a$ θα είναι: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a\in\mathbb{R}$.

Τότε όμως $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$, οπότε ασύμπτωτη είναι πάλι η $y=a$)**.**

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η σχέση $\left(fof\right)(x)+2f(x)=2x+1$ ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε για $x=2$ έχουμε:

$$f(f(2))+2f(2)=2\cdot 2+1\Leftrightarrow f(5)+10=5\Leftrightarrow f(5)=-5$$

[4] Εδώ προφανώς εννοεί «πλάγια ασύμπτωστη» ευθεία της μορφής $y=ax+\beta$ με $\alpha\neq 0$, όπως ορίζεται στο σχολικό βιβλίο .

Β2. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$, τότε έχουμε διαδοχικά:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(f(x_1)) = f(f(x_2)) \quad \text{(επειδή η } f \text{ είναι συνάρτηση) και}$$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2f(x_1) = 2f(x_2)$$

άρα:

$$f(f(x_1)) + 2f(x_1) = f(f(x_2)) + 2f(x_2) \Rightarrow 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2$$

οπότε η f είναι «1-1», και άρα αντιστρέφεται.

Β3. Θέτουμε όπου x το $f^{-1}(2)$ και έχουμε:

$$f\left(f(f^{-1}(2))\right) + 2f(f^{-1}(2)) = 2f^{-1}(2) + 1 \Rightarrow f(2) + 4 = 2f^{-1}(2) + 1 \Rightarrow 2f^{-1}(2) = 8 \Rightarrow f^{-1}(2) = 4$$

Β4. Έχουμε:

$$f\left(f^{-1}(2x^2 + 7x) - 1\right) = 2 \Leftrightarrow f^{-1}\left(2x^2 + 7x\right) - 1 = f^{-1}(2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}\left(2x^2 + 7x\right) = 5 \Leftrightarrow 2x^2 + 7x = f(5) \Leftrightarrow 2x^2 + 7x + 5 = 0 \Leftrightarrow \left(x_1 = -1 \text{ ή } x_2 = -\frac{5}{2}\right)$$

<u>**Παρατήρηση:**</u> Κανονικά σε τέτοιου είδους ασκήσεις θα πρέπει εξ΄αρχής να βρούμε το πεδίο ορισμού της f^{-1}, δηλαδή το σύνολο τιμών της f για να δούμε για ποια x ορίζεται η εξίσωση., Αυτό δεν είναι πάντα εφικτό. Στην προκειμένη περίπτωση είναι $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$.

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Γ1. Έχουμε:

$$f(x) - 1 \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq 1 \Leftrightarrow f(x) \geq f(0) \text{ , για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Άρα η συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο (ολικό ελάχιστο) στο σημείο $x_1 = 0$, το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$.

Επιπλέον, η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:

$$f'(x) = 2x + a - 1, \ x \in \mathbb{R} .$$

Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα του Fermat, θα είναι:

$$f'(0) = 0 \Leftrightarrow \alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$$

<u>**Παρατήρηση:**</u> Θα πρέπει να επαληθεύσουμε την ευρεθείσα τιμή, αφού το αντίστροφο του Θεώρηματος του Fermat δεν ισχύει. Έχουμε:

Για $\alpha = 1$ η συνάρτηση f γίνεται:

$$f(x) = x(x+1) - x + 1 = x^2 + x - x + 1 = x^2 + 1, \ x \in \mathbb{R}$$

Παρατηρούμε ότι $f(x) = x^2 + 1 \geq 1 = f(0)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως η τιμή $a = 1$ είναι δεκτή.

Γ2. Για κάθε $x \in \left(1, +\infty\right)$ έχουμε διαδοχικά:

$$g'(x)\ln x = \frac{2g(x)}{x} \Rightarrow g'(x)\ln x - \frac{2g(x)}{x} = 0 \Rightarrow g'(x)\ln^2 x - 2\ln x \cdot \frac{1}{x} g(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g'(x)\ln^2 x - \left(\ln^2 x\right)' g(x) = 0 \Rightarrow \frac{g'(x)\ln^2 x - \left(\ln^2 x\right)' g(x)}{\ln^4 x} = 0 \Rightarrow \left(\frac{g(x)}{\ln^2 x}\right)' = 0$$

Επομένως, υπάρχει σταθερά $c \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει:

$$\frac{g(x)}{\ln^2 x} = c\,,\ x \in (1,\ +\infty)$$

Για $x = e$ είναι:

$$x = e \Rightarrow \frac{g(e)}{\ln^2 e} = c \Rightarrow c = -1$$

Επομένως:

$$\frac{g(x)}{\ln^2 x} = -1 \Leftrightarrow g(x) = -\ln^2 x,\ x \in (1,\ +\infty)$$

Γ3. α) Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$K(x) = f(x) - g(x) = x^2 + 1 + \ln^2 x,\ x \in (0,\ +\infty)\ ,$$

η οποία είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$. Θα βρούμε το ελάχιστο της $K(x)$.

Η συνάρτηση $K(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ (ώς άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $(0,+\infty)$) με:

$$K'(x) = 2x + 2\ln x \cdot \frac{1}{x} = 2\frac{x^2 + \ln x}{x},\ x > 0$$

Θεωρούμε, επίσης, τη συνάρτηση:

$$\Phi(x) = x^2 + \ln x,\ x > 0$$

η οποία είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$. (Οι ρίζες και το πρόσημο της συνάρτησης $K(x)$ είναι όμοια με τις ρίζες και το πρόσημο αντίστοιχα της συνάρτησης $\Phi(x)$).

Η συνάρτηση $\Phi(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$(ώς άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $(0,+\infty)$) με $\Phi'(x) = 2x + \frac{1}{x} > 0$, για κάθε $x \in (0,\ +\infty)$. Άρα η συνάρτηση $\Phi(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, άρα και στο διάστημα $(0,1)$, οπότε:

$$\Phi\big((0,1)\big) = \left(\lim_{x\to 0^+}\Phi(x),\ \lim_{x\to 1^-}\Phi(x)\right) = (-\infty,1)\ ,\ \text{αφού}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\Phi(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(x^2 + \ln x\right) = -\infty,\quad \lim_{x\to 1^-}\Phi(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(x^2 + \ln x\right) = 1$$

Επειδή $0 \in (-\infty,1) = \Phi\big((0,1)\big)$ υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $\Phi(x_0) = 0 \Leftrightarrow K'(x_0) = 0$.

Έχουμε:

$$x > x_0 \Rightarrow \Phi(x) > \Phi(x_0) \Rightarrow \Phi(x) > 0 \Leftrightarrow K'(x) > 0$$

$$0 < x < x_0 \Rightarrow \Phi(x) < \Phi(x_0) \Rightarrow \Phi(x) < 0 \Leftrightarrow K'(x) < 0$$

Άρα η συνάρτηση $K(x)$ είναι:

- Γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,\ x_0]$ (στο x_0 είναι συνεχής) και
- Γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[x_0, +\infty)$

Η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης K φαίνονται στον επόμενο πίνακα μεταβολών.

0	x_0	$+\infty$
$K'(x)$	-	+
$K(x)$	$\downarrow$	$\uparrow$
	Ολ. Ελ	

Επομένως, η συνάρτηση:
παρουσιάζει ένα μόνο ελάχιστο (ολικό) στο $x_0 \in (0,1)$.

β) Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0, \ +\infty)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi) = g'(\xi)$.

Η συνάρτηση $K(x) = f(x) - g(x)$ έχει ακρότατο στο $x_0 \in (0,1)$ και είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ (ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $(0,1)$) με:

$$K'(x) = f'(x) - g'(x) \ , \ x \in (0,1).$$

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat, θα είναι:

$$K'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) - g'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = g'(x_0)$$

Το $x_0 = \xi$ είναι μοναδικό, ως μοναδική ρίζα της συνάρτησης Φ του ερωτήματος (Γ3α) (αφού η Φ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1)$), άρα και μοναδική ρίζα της συνάρτησης K' .

Γ4. α) Έχουμε διαδοχικά:

$$I = \lim_{x\to1^+}\left[\frac{(x-1)^x}{\eta\mu(x-1)+\dfrac{g(x)}{f(x)}}\right] = \lim_{x\to1^+}\left[\frac{(x-1)^x}{\eta\mu(x-1)-\dfrac{\ln^2 x}{x^2+1}}\right] = \lim_{x\to1^+}\left[\frac{\dfrac{(x-1)^x}{x-1}}{\dfrac{\eta\mu(x-1)}{x-1}-\dfrac{\ln^2 x}{(x-1)(x^2+1)}}\right] =$$

$$= \lim_{x\to1^+}\left[\frac{(x-1)^{x-1}}{\dfrac{\eta\mu(x-1)}{x-1}-\dfrac{\ln^2 x}{(x-1)(x^2+1)}}\right]$$

Θα βρούμε ξεχωριστά τα παραπάνω όρια. Με χρήση του κανόνα του de l' Hospital για τα παραπάνω όρια έχουμε:

Επομένως:

$$I = \frac{\lim\limits_{x\to1^+}(x-1)^{x-1}}{\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\eta\mu(x-1)}{x-1}-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln^2 x}{(x-1)(x^2+1)}} = \frac{1}{1-0} = 1$$

β) Το εμβαδόν του ζητούμενου χωρίου Ω είναι:

$$\mathrm{E}(\Omega) = \int_1^e |f(x)-g(x)|dx = \int_1^e |K(x)|dx = \int_1^e K(x)dx = \int_1^e (x^2+1+\ln^2 x)dx =$$

$$= \int_1^e x^2dx + \int_1^e 1dx + \int_1^e \ln^2 xdx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e + [x]_1^e + J = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} + e - 1 + J = \frac{e^3+3e-4}{3} + J \ \ (V)$$

, όπου $J=\int_1^e \ln^2 x dx$. Τώρα για το J έχουμε:

$$u_0=\lim_{x\to 1^+}(x-1)\ln(x-1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln(x-1)}{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x-1}}{-\frac{1}{(x-1)^2}}=-\lim_{x\to 1^+}(x-1)=0$$

$$\lim_{x\to 1^+}(x-1)^{x-1}=\lim_{u\to u_0}e^u=e^0=1$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\eta\mu(x-1)^{x-1}}{x-1}=\lim_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u}=1\ (\acute{o}\pi o\upsilon\ u=x-1,\ \acute{o}\tau\alpha\nu\ x\to 1\Leftrightarrow u\to 0)$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln^2 x}{(x-1)(x^2+1)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln^2 x}{x^3-x^2+x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{2\frac{1}{x}\ln x}{3x^2-2x+1}=0$$

$$J=\int_1^e \ln^2 x dx=\int_1^e (x)'\cdot\ln^2 xdx=\left[x\ln^2 x\right]_1^e-\int_1^e x\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}dx=e-2\int_1^e \ln xdx=$$

$$=e-2\int_1^e (x)'\cdot\ln xdx=e-2\left[x\ln x\right]_1^e+2\int_1^e x\cdot\frac{1}{x}dx=e-2e+2\int_1^e 1dx=-e+2\left[x\right]_1^e=-e+2e-2=e-2$$

Επομένως, από τη σχέση (V), έχουμε τελικά:

$$\mathrm{E}(\Omega)=\frac{e^3+3e-4}{3}+J=\frac{e^3+3e-4}{3}+e-2=\frac{e^3+3e-4+3e-6}{3}=\frac{e^3+6e-10}{3}$$

, δηλαδή $\mathrm{E}(\Omega)=\dfrac{e^3+6e-10}{3}$ τ.μ

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Αφού η f' είναι συνεχής και $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$, δηλαδή $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ή $f'(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, αντίστοιχα.

Από την σχέση:

$f(x)+f(1-x)=0$, για $x=\dfrac{1}{2}$ έχουμε:

$$f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(1-\frac{1}{2}\right)=0\Leftrightarrow 2f\left(\frac{1}{2}\right)=0\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=0$$

Άρα ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ είναι η $x=\dfrac{1}{2}$, η οποία είναι μοναδική διότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη άρα και «1-1».

Δ2. Για τη συνάρτηση f ισχύουν:

- είναι συνεχής στο $[0,1]$ και
- είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$

Άρα, από το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού, στο διάστημα $[0,1]$ προκύπτει ότι υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(x_0) = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} \Leftrightarrow f'(x_0) = f(1)-f(0) \Leftrightarrow f'(x_0) = f(1)+f(1) \Leftrightarrow f'(x_0) = 2f(1)$$

(γιατί για $x=1$ από την σχέση $f(x)+f(1-x)=0$ έχουμε

$f(1)+f(0)=0 \Leftrightarrow f(0)=-f(1)$).

2ος τρόπος: Αποδεικνύεται και με την εφαρμογή του θεωρήματος του Rolle για την συνάρτηση:

$$K(x) = f(x) - 2f(1)x,\ x \in [0,1],$$

αφού στο διάστημα $[0,1]$ πληρούνται οι προϋποθέσεις του.

Δ3. Για το σημείο $A(x_1,\ g(x_1))$ στο οποίο η g τέμνει τον άξονα $x'x$ έχουμε:

$$g(x_1) = \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0 \Leftrightarrow f(x_1) = 0 \Leftrightarrow f(x_1) = f\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{2},$$

αφού η f είναι συνάρτηση «1-1»

Άρα $A\left(\frac{1}{2},\ g\left(\frac{1}{2}\right)\right)$

Για να αποδείξουμε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_g της συνάρτησης g, στο σημείο $A\left(\frac{1}{2},\ g\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45^0 πρέπει να αποδείξουμε ότι η g είναι παραγωγίσιμη[5] στο $x_0 = \frac{1}{2}$ με $g'\left(\frac{1}{2}\right) = 1$. Έχουμε:

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{g(x)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}} = \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{\frac{f(x)}{f'(x)}-0}{x-\frac{1}{2}} = \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{f(x)}{f'(x)\left(x-\frac{1}{2}\right)} = \lim_{x\to\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{f'(x)} \frac{f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}}\right] =$$

$$= \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{1}{f'(x)} \cdot \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}} = \frac{1}{f'\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

Αφού:

[5] Η παραγώγιση της συνάρτησης g γενικά από τον τύπο της δεν είναι δυνατή, αφού αυτό απαιτεί η f να είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, το οποίο όμως δεν είναι δεδομένο αλλά ούτε προκύπτει ως συνέπεια των δεδομένων.

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{f'\left(\frac{1}{2}\right)}\left(f' \text{ συνεχής στο } \frac{1}{2}\right) \text{ και } f'\left(\frac{1}{2}\right)=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}}, \text{ δηλαδή}$$

$$g'\left(\frac{1}{2}\right)=1$$

Επομένως, $g'\left(\frac{1}{2}\right)=1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega=1 \Leftrightarrow \omega=45^0$

Δ4 α) Έχουμε ότι:

$$f(x)+f(1-x)=0 \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx+\int_0^1 f(1-x)dx=0 \Rightarrow I_1+I_2=0 \ (1) \ ,$$

όπου $I_1=\int_0^1 f(x)dx$ και $I_2=\int_0^1 f(1-x)dx$. Για το ολοκλήρωμα I_2 έχουμε:

$1-x=u \Leftrightarrow x=1-u$

Θέτουμε: $dx=-du$, οπότε έχουμε:

$x=1 \Leftrightarrow u=0$

$x=0 \Leftrightarrow u=1$

$$I_2=\int_0^1 f(1-x)dx=-\int_1^0 f(u)du=\int_0^1 f(u)du=\int_0^1 f(x)dx=I_1$$

Επομένως , από τη σχέση (1), έχουμε:

$$I_1+I_2=0 \Leftrightarrow 2I_1=0 \Leftrightarrow I_1=0 \Leftrightarrow I_1=0 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx=0$$

β) Είναι: $\int_0^1 f'(x)dx=f(1)-f(0)=1 \ (I)$. Από την σχέση $f(x)+f(1-x)=0$, για $x=1$ έχουμε:

$$f(0)+f(1)=0 \ (II)$$

Από τις σχέσεις (I) και (II), προσθέτοντας κατά μέλη, έχουμε

$$f(0)=-\frac{1}{2} \ \kappa\alpha\iota \ f(1)=\frac{1}{2} \ .$$

Το ζητούμενο εμβαδόν του χωρίου Ω είναι $\mathrm{E}(\Omega)=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left|f^{-1}(x)\right|dx$.

Θέτουμε:

$f^{-1}(x)=u \Leftrightarrow x=f(u)$

$dx=f'(u)du$

$x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow f(u)=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow f(u)=f(0) \Leftrightarrow u=0$ (αφού η f είναι «1-1»)

$x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow f(u)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow f(u)=f(1) \Leftrightarrow u=1$

Επομένως, έχουμε διαδοχικά:

$$\mathrm{E}(\Omega)=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left|f^{-1}(x)\right|dx=\int_0^1|u|\cdot f'(u)du=\int_0^1 uf'(u)du=\left[uf(u)\right]_0^1-\int_0^1 f(u)du=f(1)-0=\frac{1}{2}$$

δηλαδή $\mathrm{E}(\Omega)=\frac{1}{2}$ τ.μ.

Δ5. α) Θέτουμε ξανά:

$$f^{-1}(x)=u\Leftrightarrow x=f(u)$$

$$dx=f'(u)du$$

$$x=0\Leftrightarrow u=f^{-1}(0)\Leftrightarrow u=\frac{1}{2}\ \ (\alpha\varphi o\acute{\upsilon}\, f\left(\frac{1}{2}\right)=0)$$

$$x=f(\lambda)\Leftrightarrow u=f^{-1}\left(f(\lambda)\right)\Leftrightarrow u=\lambda$$

και έχουμε:

$$K(\lambda)=\int_{\frac{1}{2}}^{\lambda}f(x)dx+\int_0^{f(\lambda)}f^{-1}(x)dx=\int_{\frac{1}{2}}^{\lambda}f(x)dx+\int_{\frac{1}{2}}^{\lambda}uf'(u)du=$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{\lambda}f(x)dx+\left[uf(u)\right]_{\frac{1}{2}}^{\lambda}-\int_{\frac{1}{2}}^{\lambda}f(u)du=\lambda f(\lambda)-\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)=\lambda f(\lambda)-\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)=\lambda f(\lambda)$$

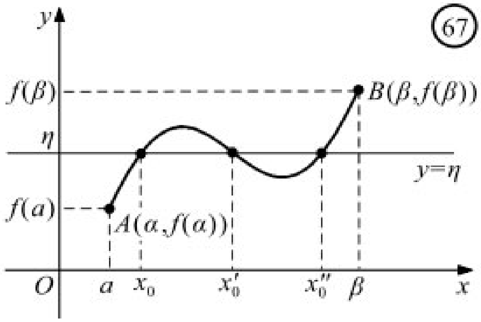
β) Με επαναλαμβανόμενη χρήση του κανόνα του de l' Hospital έχουμε διαδοχικά:

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\mathrm{K}(\lambda)\cdot\ln\lambda}{f(\lambda)\cdot e^{\lambda}}=\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\lambda f(\lambda)\cdot\ln\lambda}{f(\lambda)\cdot e^{\lambda}}=\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\lambda\cdot\ln\lambda}{e^{\lambda}}=\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1+\ln\lambda}{e^{\lambda}}=\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\frac{1}{\lambda}}{e^{\lambda}}=\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{\lambda e^{\lambda}}=0$$

6ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

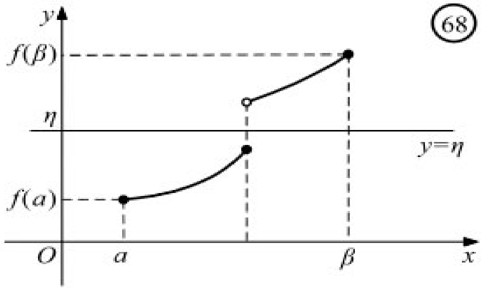
ΘΕΜΑ Α

Α1. α. <u>Διατύπωση του Θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών:</u>
Έστω μια συνάρτηση f , ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β].
Αν η f είναι συνεχής στο [α, β] και f(α) ≠ f(β) τότε, για κάθε αριθμό *η* μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in$ (α, β) τέτοιος, ώστε f(x_0) = η.
<u>Απόδειξη του Θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών:</u>
Ας υποθέσουμε ότι f(α) < f(β). Τότε θα ισχύει f(α) < *η* < f(β) (επόμενο σχήμα).
Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση g(x) = f(x) − η, x ϵ [α, β], παρατηρούμε ότι :



● η g είναι συνεχής στο [α, β] και
● g(α) g(β) < 0 , αφού g(α) = f(α) − η < 0 και g(β) = f(β) − η > 0 Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0 \in$ (α, β) τέτοιο, ώστε g(x_0) = f(x_0) − η = 0, οπότε f(x_0) = η .

β. Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο διάστημα [α, β], τότε, όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα, δεν παίρνει υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές.



Α2. Το λάθος βρίσκεται στην αντικατάσταση $x = \frac{1}{u}$.

Η αντικατάσταση $x = \frac{1}{u}$ δεν είναι σωστή διότι όταν $x = 0$ δεν υπάρχει αντίστοιχο u .

Α3. α. Σωστό **β.** Λάθος **γ.** Λάθος **δ**. Σωστό **ε.** Λάθος.

Α4. Το 2 **(**Το σημείο $A\big(0,\ f(0)\big)$ είναι θέση τοπικού ελάχιστου της f) διότι $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in \big(\text{-}2,\ 0\big)$ και συνεχής στο $\big[-2,\ 0\big]$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\big[-2,\ 0\big]$. Ακόμα $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \big(0, 2\big)$ και συνεχής στο $\big[0,\ 2\big]$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\big[0,\ 2\big]$. Επομένως στο $x_0 = 0$ έχει τοπικό ελάχιστο, δηλαδή το σημείο $A\big(0,\ f(0)\big)$ είναι θέση τοπικού ελάχιστου της f .

ΘΕΜΑ Β

Β1. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η f είναι συνάρτηση «1-1». Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$

Έχουμε διαδοχικά:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 1 + f(x_1) = 1 + f(x_2) \Rightarrow f(1 + f(x_1)) = f(1 + f(x_2)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x_1 - 6 + f(x_1) = 2x_2 - 6 + f(x_2) \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η f αντιστρέφεται.

Β2. Για $x = 3$ έχουμε:

$$f(1 + f(3)) = 2 \cdot 3 - 6 + f(3) \Leftrightarrow f(1 + f(3)) = f(3) \Leftrightarrow 1 + f(3) = 3 \Leftrightarrow f(3) = 2$$

Β3. Έχουμε ισοδύναμα:

$$f\left(1 + f\left(x^2 + x + 1\right)\right) = f(1 + f(3)) \Leftrightarrow 1 + f\left(x^2 + x + 1\right) = 1 + f(3) \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1, x = 2$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = e^x + 2x + 1,\ x \in \mathbb{R}$$

Εφαρμόζουμε το Θ. Bolzano για την g στο $[-1,\ 0]$

- Η g είναι συνεχής στο $[-1,\ 0]$ (ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων στο $[-1,\ 0]$).
- $g(0) = 2 > 0$
- $g(-1) = \dfrac{1}{e} - 1 < 0$

Άρα υπάρχει $a \in (-1,\ 0)$ τέτοιο, ώστε:

$$g(a) = 0 \Leftrightarrow e^a + 2a + 1 = 0\ .$$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$), με $g'(x) = e^x + 2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και επειδή η g είναι γνησίως αύξουσα στο $x \in \mathbb{R}$, άρα και «1-1» , δηλαδή η η g έχει μοναδική ρίζα την $x = a$.

Γ2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με:

$$f'(x) = e^x + 2x + 1,\ x \in \mathbb{R}\ .$$

Άρα $f'(x) = g(x)$, $x \in \mathbb{R}$ και η g έχει μοναδική ρίζα την $x = a$. Έχουμε:

$$x < a \Rightarrow g(x) < g(a) \Rightarrow f'(x) < 0$$

$$x > a \Rightarrow g(x) > g(a) \Rightarrow f'(x) > 0$$

Δηλαδή $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty,\ \alpha)$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $(-\infty,\ \alpha]$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,\ \alpha]$. Ακόμα $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (a,\ +\infty)$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\ +\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,\ +\infty)$.

Επομένως η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x = \alpha$, το $f(a) = e^a + a^2 + \alpha$ (1) .

Όμως έχουμε:

$$g(a)=0 \Leftrightarrow e^{a}+2a+1=0 \Leftrightarrow e^{a}=-2a-1 \quad (2)$$

Άρα η (1) δίνει:

$$f(a)=e^{a}+\alpha^{2}+\alpha=-2a-1+\alpha^{2}+\alpha=\alpha^{2}-\alpha-1$$

Άρα έχουμε:

$$f(x)\geq f(a)\Rightarrow f(x)\geq \alpha^{2}-\alpha-1 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}\ .$$

Γ3. Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(e^{x}+x^{2}+x\right)=+\infty \text{ και } \lim_{x\to-\infty}\left(e^{x}+x^{2}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left[x^{2}\left(\frac{e^{x}}{x^{2}}+1+\frac{1}{x}\right)\right]=+\infty\ .$$

Αν $\Delta_1=\left(-\infty,\ \alpha\right],\ \Delta_2=\left[\alpha,+\infty\right)$ θα έχουμε:

$$f(\Delta_1)=\left[\alpha^{2}-\alpha-1,\ +\infty\right)$$

$$f(\Delta_2)=\left[\alpha^{2}-\alpha-1,\ +\infty\right)$$

(επειδή η f γν. φθίνουσα στο Δ_1 και γν. άυξουσα στο Δ_2)

Είναι:

$$\alpha\in(-1,\ 0)\Rightarrow -1<\alpha<0\Rightarrow\begin{cases}0<\alpha^{2}<1\\ 0<-\alpha<1\end{cases}\Rightarrow -1<\alpha^{2}-\alpha-1<1 \text{ και } \frac{2017}{2016}>1\ .$$

Επομένως:

- $\frac{2017}{2016}\in f(\Delta_1)$, άρα υπάρχει $\rho_1\in(-\infty,\ \alpha)$ τέτοιος, ώστε $f(\rho_1)=\frac{2017}{2016}$ και είναι μοναδικός αφού η f, ως γνησίως φθίνουσα στο Δ_1 ,είναι και «1-1».
- $\frac{2017}{2016}\in f(\Delta_2)$, άρα υπάρχει $\rho_2\in(a,+\infty)$ τέτοιος, ώστε $f(\rho_2)=\frac{2017}{2016}$ και είναι μοναδικός αφού η f, ως γνησίως αύξουσα στο Δ_2, είναι και «1-1».

Επομένως η f έχει δύο ακριβώς ρίζες, τις $\rho_1,\ \rho_2$.

Γ4. Η σχέση που θέλουμε να αποδείξουμε γράφεται διαδοχικά:

$$f(x^{2}+1)+f(x^{2}+2)<f(x^{2})+f(x^{2}+3)\Leftrightarrow f(x^{2}+1)-f(x^{2})<f(x^{2}+3)-f(x^{2}+2)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{f(x^{2}+1)-f(x^{2})}{(x^{2}+1)-x^{2}}<\frac{f(x^{2}+3)-f(x^{2}+2)}{(x^{2}+3)-(x^{2}+2)} \quad (1)$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού για την συνάρτηση f στα διαστήματα:

$$\left[x^{2},\ x^{2}+1\right] \text{ και } \left[x^{2}+2,\ x^{2}+3\right]\ ,\ x\in\mathbb{R}$$

- Η f παραγωγίσιμη στα διαστήματα $\left[x^{2},\ x^{2}+1\right]$ και $\left[x^{2}+2,\ x^{2}+3\right]$, $x\in\mathbb{R}$

(ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$). Άρα η f είναι και συνεχής στα διαστήματα αυτά. Επομένως υπάχουν αντίστοιχα :

$$\xi_1\in\left(x^{2},x^{2}+1\right),\ \xi_2\in\left(x^{2}+2,\ x^{2}+3\right) \text{ με:}$$

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x^2+1) - f(x^2)}{(x^2+1) - x^2} \quad \text{και} \quad f'(\xi_2) = \frac{f(x^2+3) - f(x^2+2)}{(x^2+3) - (x^2+2)}$$

Έτσι η προς απόδειξη σχέση (1) γίνεται $f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$, η οποία είναι αληθής αφού:

$\xi_1 < \xi_2 \Rightarrow f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$, επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ διότι: $f''(x) = e^x + 2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (f' συνεχής στο $\mathbb{R}$).

Γ5. Έχουμε ότι:

$$y(t) = e^{x(t)} + x^2(t) + x(t),\ t \geq 0 \qquad (2).$$

Τα μέλη της σχέσης (2) είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις για κάθε $t \geq 0$ (ως πράξεις και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων για κάθε $t \geq 0$). Επομένως έχουμε:

$$y'(t) = e^{x(t)} \cdot x'(t) + 2x(t) \cdot x'(t) + x'(t) \Leftrightarrow y'(t) = x'(t)\left(e^{x(t)} + 2x(t) + 1\right) \quad (3)$$

Αν $t = t_0$ είναι η χρονική στιγμή που το σημείο Μ διέρχεται από το $(a, f(a))$, τότε $x(t_0) = \alpha \in (-1,\ 0)$.

Η σχέση (3) για $t = t_0$ γίνεται:

$$y'(t_0) = x'(t_0)\left(e^{x(t_0)} + 2x(t_0) + 1\right) \quad (4) \text{ με } x'(t) \neq 0$$

Ισχύει ακόμα ότι :

$$e^{x(t_0)} + 2x(t_0) + 1 = e^a + 2a + 1 = 0 \quad (5).$$

Η σχέση (4), λόγω της σχέσης (5) γίνεται:

$$y'(t_0) = x'(t_0) \cdot 0 = 0.$$

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. α. Έχουμε διαδοχικά:

$$f(x) = x\eta\mu x \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x - f(x) = \sigma\upsilon\nu x - x\eta\mu x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\eta\mu x - f(x)\right)' = (x\sigma\upsilon\nu x)' \Leftrightarrow f(x) = \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x + c,\ c \in \mathbb{R}$$

για $x = 0$ έχουμε:

$$f(0) = 0 + c \Leftrightarrow 0 = c \Leftrightarrow c = 0$$

άρα:

$$f(x) = \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x$$

β. Η συνάρτηση:

$$f(x) = \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x$$

είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ με:

$$f'(x) = x\eta\mu x > 0, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ και η } f \text{ είναι συνεχής στο } \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και ισχύει:

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow f(0) < f(x) \Leftrightarrow 0 < \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \eta\mu x > x\sigma\upsilon\nu x$$

Δ2. $g(x)=\left|x\varepsilon\varphi x-x^2\right|=|x|\cdot|\varepsilon\varphi x-x|$

Από το ερώτημα (Δ1 β) ισχύει:

$$\eta\mu x>x\sigma\upsilon\nu x,\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow \varepsilon\varphi x>x.$$

'Εχουμε:

Αν $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$, τότε $-x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ και ισχύει:

$$\varepsilon\varphi(-x)>-x\Leftrightarrow-\varepsilon\varphi x>-x\Leftrightarrow\varepsilon\varphi x<x$$

για $x=0\Rightarrow g(0)=0$

Άρα $g(x)=x\varepsilon\varphi x-x^2,\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$) με:

$$g'(x)=\left(x\varepsilon\varphi x-x^2\right)'=\varepsilon\varphi x-2x+\frac{x}{\sigma\upsilon\nu^2x}=$$

$$=\left(\varepsilon\varphi x-x\right)+\frac{x}{\sigma\upsilon\nu^2x}-x=\left(\varepsilon\varphi x-x\right)+x\left(\frac{1-\sigma\upsilon\nu^2x}{\sigma\upsilon\nu^2x}\right)==\left(\varepsilon\varphi x-x\right)+x\cdot\varepsilon\varphi^2x$$

- Αν $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, τότε $\varepsilon\varphi x-x>0$ και $x\varepsilon\varphi^2x>0$ άρα $g'(x)>0$
- Αν $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$, τότε $\varepsilon\varphi x-x<0$ και $x\varepsilon\varphi^2x<0$ άρα $g'(x)<0$
- Αν $x=0\Rightarrow g'(0)=0$

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$

Η g παρουσιάζει για $x=0$ ολικό ελάχιστο το $g(0)=0$.

<u>2ος τρόπος:</u>

$$g'(x)==\left(x\varepsilon\varphi x-x^2\right)'=\varepsilon\varphi x-2x+\frac{x}{\sigma\upsilon\nu^2x}==\frac{\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x+x-2x\sigma\upsilon\nu^2x}{\sigma\upsilon\nu^2x}=$$

$$=\frac{\sigma\upsilon\nu x\cdot\left(\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x\right)+x\eta\mu^2x}{\sigma\upsilon\nu^2x}$$

$g'(0)=0$

- Αν $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, τότε $\sigma\upsilon\nu x>0,\ \eta\mu x>x\sigma\upsilon\nu x,\ x\eta\mu^2x>0$, τότε $g'(x)>0$

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$

- Έστω $x_1, x_2 \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ με $x_1 < x_2$, τότε:

$$-x_1 > -x_2 \Rightarrow g(-x_1) > g(-x_2) \Rightarrow g(x_1) > g(x_2)$$

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$

Η g παρουσιάζει για $x = 0$ ολικό ελάχιστο το $g(0) = 0$

Δ3. α) $g(x) = a$, όπου $a > 0$

- $g\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right)\right) = [0, +\infty)$ και $a \in [0, +\infty)$, άρα υπάρχει μοναδικό $x_o \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

(γιατί η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$) τέτοιο, ώστε $g(x_o) = a$

- $-x_o \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ και

$$g(-x_o) = (-x_o)\varepsilon\varphi(-x_o) - (-x_o)^2 = g(x_o) = a$$

Το $-x_0$ είναι μοναδικό

(γιατί η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$)

Άρα το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης $g(x) = a$, όταν $a > 0$ είναι $-x_o + x_o = 0$.

β). Επειδή x_1 , x_2 , x_3 οι θετικές ρίζες των εξισώσεων $g(x) = 1$, $g(x) = 2$, $g(x) = 3$ αντίστοιχα, έχουμε:

$$g(x_1) = 1,\ g(x_2) = 2,\ g(x_3) = 3$$

και είναι:

$$1 < 2 < 3 \Leftrightarrow g(x_1) < g(x_2) < g(x_3) \Leftrightarrow x_1 < x_2 < x_3$$

από την εφαρμογή του Θ.Μ.Τ του Διαφορικού Λογισμού για την g στα $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$ (αφού πληρούνται οι προϋποθέσεις διότι gπαραγωγίσιμη στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, επομένως και στα, $[x_2, x_3]$, άρα και συνεχής σε αυτά) έχουμε:

$$(x_2 - x_1)\cdot g'(\xi_1) = g(x_2) - g(x_1) = 2 - 1 = 1 \quad ,\xi_1 \in (x_1, x_2)$$

$$(x_3 - x_2)\cdot g'(\xi_2) = g(x_3) - g(x_2) = 3 - 2 = 1 \quad ,\xi_2 \in (x_2, x_3)$$

Προσθέτοντας τις προηγούμενες σχέσεις κατά μέλη προκύπτει:

$$(x_2 - x_1)\cdot g'(\xi_1) + (x_3 - x_2)\cdot g'(\xi_2) = 2$$

Δ4. α. Έχουμε διαδοχικά:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left[\eta\mu x - f(x)\right]-\ln x + x^2}{\eta\mu^2 x - x\sigma\upsilon\nu x + x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\sigma\upsilon\nu x)+x^2}{\eta\mu^2 x - x\sigma\upsilon\nu x + x} \overset{D.L.P}{=}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\varepsilon\varphi x + 2x}{2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu x + x\eta\mu x + 1} \overset{D.L.P}{=} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}+2}{2\sigma\upsilon\nu^2 x - 2\eta\mu^2 x + 2\eta\mu x + x\sigma\upsilon\nu x} =$$

$$=\frac{-\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 0}+2}{2\sigma\upsilon\nu^2 0 - 2\eta\mu^2 0 + 2\eta\mu 0 + 0\sigma\upsilon\nu 0} = \frac{1}{2}$$

<u>**2ος τρόπος:**</u>

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left[\eta\mu x - f(x)\right]-\ln x + x^2}{\eta\mu^2 x - x\sigma\upsilon\nu x + x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\sigma\upsilon\nu x)+x^2}{\eta\mu^2 x - x\sigma\upsilon\nu x + x} = = \lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{\ln(\sigma\upsilon\nu x)}{x^2}+1}{\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)^2 - \dfrac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x}} = l$$

- $$\lim_{x\to 0^+}\frac{-\varepsilon\varphi x}{2x} \overset{D.L.H}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\sigma\upsilon\nu x)}{x^2} \overset{D.L.H}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{-1}{2\sigma\upsilon\nu^2 x} = -\frac{1}{2}$$
- $$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2 = 1^2 = 1$$
- $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} \overset{D.L.H}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{-\eta\mu x}{1} = 0$$

Άρα:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left[\eta\mu x - f(x)\right]-\ln x + x^2}{\eta\mu^2 x - x\sigma\upsilon\nu x + x} = \frac{-\frac{1}{2}+1}{1-0} = \frac{1}{2}$$

β. Για $0 < x \le \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x > 0$ (Ι) (από το ερώτημα Δ1 β) και $x\eta\mu x > 0$ (ΙΙ) για κάθε $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Άρα με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε:

$$\eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x + x\eta\mu x > 0 \quad \text{(ΙΙΙ), ΄για κάθε } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Άρα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f, -f'$ τέμνονται μόνο στο σημείο $O\ (0,0)$ (αφού $f(0) = f'(0) = 0$).

Το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και $-f'$ και την ευθεία $x = \dfrac{\pi}{2}$

είναι (λόγω της σχέσης (ΙΙΙ) έχουμε:

$$\left|\eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x + x\eta\mu x\right| = \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x + x\eta\mu x \text{ για κάθε } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]):$$

$$\mathrm{E}(\Omega) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| f(x) - f'(x)\right| dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x + x\eta\mu x\right| dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x + x\eta\mu x) dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sigma\upsilon\nu x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\eta\mu x dx = I_1 - I_2 + I_3 \quad (1)$$

$$\mathrm{I}_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu x dx = \left[-\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$\mathrm{I}_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sigma\upsilon\nu x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\eta\mu x)' dx = \left[x\eta\mu x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu x dx = \frac{\pi}{2} + \left[\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$$

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\eta\mu x dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\sigma\upsilon\nu x)' dx = -\left[x\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu x dx = \left[\eta\mu x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

Άρα: $\mathrm{E}(\Omega) = 1 - \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) + 1 = 3 - \frac{\pi}{2} \quad \tau.\mu.$

<u>Εναλλακτικά για το μοναδικό σημείο τομής των</u> $f, -f'$ <u>έχουμε:</u>

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f, -f'$ τέμνονται μόνο στο σημείο $O\ (0,0)$ αφού :

$$f(x) = -f'(x) \Leftrightarrow \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x = -x\eta\mu x \Leftrightarrow \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x + x\eta\mu x = 0 \quad (1)$$

Προφανώς για $x = 0$ η (1) επαληθεύεται, δηλαδή οι $f, -f'$ τέμνονται στο $O\ (0,0)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$\mathrm{K}(x) = \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x + x\eta\mu x, \; x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

η οποία είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$) με $\mathrm{K}'(x) = x\eta\mu x + \eta\mu x + x\sigma\upsilon\nu x > 0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και επειδή η K είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ θα είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, άρα και «1-1» και επομένως η $x = 0$ είναι η μοναδική ρίζα της (1). Άρα οι $f, -f'$ τέμνονται μόνο στο σημείο $O\ (0,0)$.

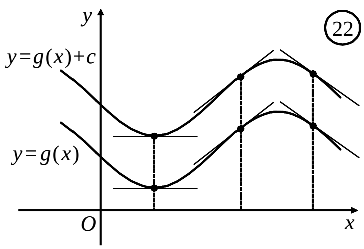
7ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. α. Η συνάρτηση $f-g$ είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ ισχύει:

$$(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0 .$$

Επομένως, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, η συνάρτηση $f-g$ είναι σταθερή στο Δ. Άρα, υπάρχει σταθερά C τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει $f(x)-g(x)=c$, οπότε $f(x)=g(x)+c$.



ii. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αρχική συνάρτηση **ή** παράγουσα **της f στο Δ** ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει:

F'(x) = f(x) , για κάθε x ∈ Δ.

Α2. Αν μια συνάρτηση f είναι:

♦ συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και

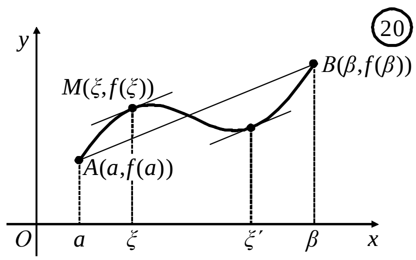
♦ παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β)

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$$

Γεωμετρική ερμηνεία

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας *ΑΒ*.



Α3. α. Λάθος **β.** Σωστό **γ.** Λάθος **δ.** Σωστό **ε.** Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η f είναι συνεχής σε κάθε ένα από τα διαστήματα:

$[-4, -2), (-2, 0), (0, 5]$, διότι δεν είναι συνεχής στο σημείο $x_1 = -2$ και δεν ορίζεται στο σημείο $x_2 = 0$

Β2. α. $\lim_{x\to -2^-} f(x) = 1$ **β.** $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$.

Β3.

α. Τα εσωτερικά σημεία $x_3 = 1,\ x_4 = 4,\ x_5 = 3$ του διαστήματος $(0, 5]$ είναι τα ζητούμενα κρίσιμα σημεία.

Στα σημεία $A(x_3, f(x_3)),\ B(x_4, f(x_4))$ υπάρχει εφαπτομένη παράλληλη στον άξονα $x'x$ και επομένως $f'(x_3) = 0$ και $f'(x_4) = 0$ άρα οι θέσεις $x_3 = 1,\ x_4 = 4$ είναι κρίσιμα σημεία της f. Στο σημείο $\Gamma(x_5, f(x_5))$ δεν υπάρχει η παράγωγος της f και άρα η θέση x_5 είναι επίσης κρίσιμο σημείο της f .

β. Η παράγωγος της f, όταν $x \in (-4, -2)$ είναι ίση με $\varepsilon\varphi 135^0 = -1$ ή διαφορετικά είναι ο λόγος $\dfrac{(3-1)}{(-4+2)} = -1$.

Β4. Το Ι ορίζεται, αφού η f ορίζεται στο διάστημα $[2, 4]$ και είναι συνεχής σε αυτό Το J δεν ορίζεται αφού η f δεν ορίζεται στο σημείο $x_0 = 0$.

Β5.

α. Το πεδίο ορισμού D_{fog} έχουμε:

$$D_{fog} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, g(x) \in [-4, 0) \cup (0, 5]\}$$

Είναι:

$g(x) \in [-4, 0) \cup (0, 5]$ αν, και μόνο αν,

$$(-4 \le x+1 < 0 \text{ ή } 0 < x+1 \le 5) \text{ ή } x \in [-5, -1) \cup (-1, 4]$$

Επομένως $D_{fog} = [-5, -1) \cup (-1, 4]$.

β. Ο τύπος της συνάρτησης fog είναι:

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(x+1), x \in D_{f0g}.$$

Επομένως η γραφική παράσταση της fog είναι η γραφική παράσταση της f μετατοπισμένη κατά 1 μονάδα αριστερά (οριζόντια μετατόπιση).

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως πολυωνυμική) με :

$$f'(x) = 3x^2 + 1 > 0,\ x \in \mathbb{R}.$$

Άρα αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ θα είναι και "1-1" και επομένως η f αντιστρέφεται.Το σύνολο τιμών της είναι το (A, B), όπου:

$$A = \lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty,\ B = \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty \text{, δηλαδή το } \mathbb{R}.$$

Γ2. Αρκεί να δείξω ότι η εξίσωση $f^{-1}(x) = f(x)$ έχει μοναδική ρίζα το -1. Έχουμε:

$$f^{-1}(x)=f(x)\Leftrightarrow f(f(x))=x$$

Έστω:

$$g(x)=f(f(x))-x \text{ , τότε είναι } g(x)=0\Leftrightarrow f^{-1}(x)=f(x)$$

Παρατηρώ ότι:

$$g(-1)=f(f(-1))+1=f(-1)+1=-1+1=0$$

Άρα το -1 είναι ρίζα της g(x)

Η συνάρτηση g(x) είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως σύνθεση και διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με:

$$g'(x)=f'(f(x))f'(x)-1=\left(3(x^3+x+1)^2+1\right)(3x^2+1)-1=(9x^2+3)(x^3+x+1)^2+3x^2>0$$

Άρα η $g(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και «1-1».

Επομένως το -1 είναι η μοναδική ρίζα της

$$g(x)=0\Leftrightarrow f^{-1}(x)=f(x)$$

Άρα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο το $A(-1,\ f(-1))$ ή $A(-1,\ -1)$.

Εναλλακτικά

<u>2ος τρόπος:</u>

Έχουμε:

$f(-1)=-1\Leftrightarrow f^{-1}(-1)=-1$, δηλαδή το -1 είναι ρίζα της εξίσωσης:

$$f^{-1}(x)=f(x)\Leftrightarrow f(f(x))=x\ .$$

Έστω ότι η $f^{-1}(x)=f(x)$ έχει 2 ρίζες ρ_1,ρ_2 ($\rho_1<\rho_2$) επομένως και η $f(f(x))=x$ έχει ρίζες τις ρ_1,ρ_2 .

Θεωρώ τη συνάρτηση: $g(x)=f(f(x))-x,\ x\in\mathbb{R}$

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα του Rolle για την g στο διάστημα $[\rho_1,\rho_2]$.Έχουμε:

- Η g είναι συνεχής στο $[\rho_1,\rho_2]$ (ως σύνθεση και διαφορά συνεχών συναρτήσεων στο $[\rho_1,\rho_2]$)
- Η g είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1,ρ_2) (ως σύνθεση και διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο (ρ_1,ρ_2)) με:

$$g'(x)=f'(f(x))\cdot f'(x)-1=\left(3f^2(x)+1\right)\cdot(3x^2+1)-1=9f^2(x)\cdot x^2+3f^2(x)+3x^2>0$$

- $g(\rho_1)=g(\rho_2)=0$

Άρα υπάρχει $\xi\in(\rho_1,\rho_2)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi)=0$ που είναι άτοπο αφού $g'(x)>0$.

Άρα η $x=-1$ η μοναδική ρίζα της $f^{-1}(x)=f(x)$ και επομένως οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο το $A(-1,\ f(-1))$ ή $A(-1,\ -1)$.

Γ3. α.

- Για $x=y$ ισχύει η ισότητα:

$$|f^{-1}(x)-f^{-1}(y)|=|f(x)-f(y)|=|x-y|$$

- Για $x<y$ εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ. του διαφορικού λογισμού στο διάστημα $[x,y]$ και έχουμε:

  Η f είναι συνεχής στο $[x,y]$ (ως πολυωνυμική)

  Η f είναι παραγωγίσιμη στο (x,y) (ως πολυωνυμική)

Άρα υπάρχει $\xi_1 \in (x,y): f'(\xi_1)=\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}\geq 1$ ($f'(\xi_1)=3\xi_1^2+1\geq 1$), δηλαδή:

$$f(y)-f(x)\geq y-x \text{ ή } |f(x)-f(y)|\geq |x-y| \text{ διότι:}$$

$$|f(x)-f(y)|=|f(y)-f(x)|=f(y)-f(x)\geq y-x=|y-x|=|x-y| \quad (1)$$

- Για $x>y$ εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ. του διαφορικού λογισμού στο διάστημα $[y,x]$ και έχουμε:

  Η f είναι συνεχής στο $[y,x]$ (ως πολυωνυμική)

  Η f είναι παραγωγίσιμη στο (y,x) (ως πολυωνυμική)

Άρα υπάρχει $\xi_2 \in (y,x): f'(\xi_2)=\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}\geq 1$ ($f'(\xi_2)=3\xi_2^2+1\geq 1$), δηλαδή:

$$f(x)-f(y)\geq x-y \text{ ή } |f(x)-f(y)|\geq |x-y| \text{ διότι:}$$

$$|f(x)-f(y)|=f(x)-f(y)\geq x-y=|x-y| \quad (2)$$

Επομένως από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$|x-y|\leq |f(x)-f(y)| \text{ (I) για κάθε } x,y\in\mathbb{R}$$

Στην σχέση (I) θέτουμε όπου x το $f^{-1}(x)$ και y το $f^{-1}(y)$, αφού η (I) ισχύει για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ και $f^{-1}(x)$, $f^{-1}(y)\in\mathbb{R}$. Άρα έχουμε:

$$|f^{-1}(x)-f^{-1}(y)|\leq |x-y| \text{ και τελικά:}$$

$$|f^{-1}(x)-f^{-1}(y)|\leq |x-y|\leq |f(x)-f(y)|$$

β. Έστω οποιοδήποτε $x_0\in\mathbb{R}$.

Θα αποδείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0, δηλαδή ότι: $\lim\limits_{x\to x_0} f^{-1}(x)=f^{-1}(x_0)$.

Έχουμε:

$$|f^{-1}(x)-f^{-1}(x_0)|\leq |x-x_0| \Leftrightarrow -|x-x_0|\leq f^{-1}(x)-f^{-1}(x_0)\leq |x-x_0|$$

Είναι $\lim\limits_{x\to x_0}|x-x_0|=\lim\limits_{x\to x_0}\left(-|x-x_0|\right)=0$

Από το κριτήριο της παρεμβολής έχουμε και

$$\lim_{x\to x_0}\left(f^{-1}(x)-f^{-1}(x_0)\right)=0 \text{ ή } \lim_{x\to x_0} f^{-1}(x)=f^{-1}(x_0)$$

Γ4. Έχουμε ισοδύναμα:

$$f^{-1}(\xi)+2\xi=0 \Leftrightarrow f^{-1}(\xi)=-2\xi \Leftrightarrow \xi=f(-2\xi) \Leftrightarrow f(-2\xi)-\xi=0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση: $g(x)=f(-2x)-x,\ x\in\mathbb{R}$

Ισχύουν:

- Η g είναι συνεχής στο $[0,\ 1]$ (ως σύνθεση και διαφορά συνεχών συναρτήσεων στο $[0,\ 1]$).

- $g(0) = f(0) - 0 = 1 > 0$
- $g(1) = f(-2) - 1 = -9 - 1 = -10 < 0$

Από το Θεώρημα του Bolzano υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $g(\xi) = 0$ ή ισοδύναμα $f^{-1}(\xi) + 2\xi = 0$.

Επιπλέον η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο (0,1) (ως σύνθεση και διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο (0, 1)) με:

$$g'(x) = -2f'(-2x) - 1 = -2(12x^2 + 1) - 1 = -24x^2 - 3 < 0$$

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και «1-1», και επομένως το παραπάνω ξ είναι μοναδικό.

Εναλλακτικά

<u>2ος τρόπος</u>

Ισχύει $f(0) = 1$ και $f(-1) = -1$ και η f είναι συνεχής στο $[-1,0]$. Επομένως, σύμφωνα με το Θ. Bolzano υπάρχει (και είναι μοναδικό) $x_1 \in (-1,0)$ τέτοιο, ώστε:

$$f(x_1) = 0 \Leftrightarrow f^{-1}(0) = x_1 \in (-1,0)$$

Ακόμα $f(0) = 1 \Leftrightarrow f^{-1}(1) = 0$

Θα εφαρμόσουμε το Θ. Bolzano για την συνάρτηση:

$$h(x) = f^{-1}(x) + 2x$$

στο διάστημα $[0,\ 1]$.

Έχουμε:

Η $h(x)$ είναι συνεχής στο $[0,\ 1]$ (άθροισμα συνεχών στο $[0,\ 1]$) και

$$h(0) = f^{-1}(0) = x_1 < 0\ ,\quad h(1) = f^{-1}(1) + 2 = 2 > 0$$

Επομένως υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε:

$$h(\xi) = 0 \Leftrightarrow f^{-1}(\xi) + 2\xi = 0$$

Η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα διότι:

Αν $y_1, y_2 \in f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ με $y_1 < y_2$.Θα αποδείξουμε ότι: $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$.

Έστω $y_1 = f(x_1),\ y_2 = f(x_2)$ με $x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}$. Άρα

$$x_1 = f^{-1}(y_1),\ x_2 = f^{-1}(y_2) \quad (*)$$

Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα και ισχύει η (*) έχουμε διαδοχικά:

$$y_1 < y_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow x_1 < x_2 \Leftrightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$$

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα.

Τώρα θα αποδείξουμε ότι η $h(x)$ είναι γνησίως αύξουσα:

Έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f^{-1}(x_1) < f^{-1}(x_2)$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow 2x_1 < 2x_2$$

και με πρόσθεση αυτών κατά μέλη παίρνουμε:

$$f^{-1}(x_1) + 2x_1 < f^{-1}(x_2) + 2x_2 \Rightarrow h(x_1) < h(x_2)$$

Το ξ είναι μοναδικό, αφού η συνάρτηση $h(x)$ είναι γνησίως αύξουσα, άρα και «1-1» .

Γ5. Έχουμε διαδοχικά για κάθε $x \in \mathbb{R}$:

$$F^2(x) \geq F(x)F(2-x) \Leftrightarrow F^2(x) - F(x)F(2-x) \geq 0 \ (1)$$

Θέτουμε:

$$g(x) = F^2(x) - F(x)F(2-x), \ x \in \mathbb{R}$$

και από την (1) προκύπτει:

$$g(x) \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq g(1), \ x \in \mathbb{R}$$

Δηλαδή η συνάρτηση g έχει ελάχιστο στο $x_0 = 1$ το οποίο είναι εσωτερικό σημεό του $\mathbb{R}$ και η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως αποτέλεσμα πράξεων και σύνθεσης παραγωγίσιμψων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με:

$$g'(x) = 2F(x)F'(x) - F'(x)F(2-x) + F(x)F'(2-x), \ x \in \mathbb{R}$$

Επομένως από το Θεώρημα του Fermat θα έχουμε:

$$g'(1) = 0 \Leftrightarrow 2F(1)F'(1) - F'(1)F(1) + F(1)F'(1) = 0 \ \text{ ή}$$

$$2F(1)F'(1) = 0 \Rightarrow F(1) = 0 \ (F'(1) = f'(1) = 3 \neq 0)$$

Άρα είναι:

$$F'(x) = f'(x) \Leftrightarrow F(x) = f(x) + c \ , \ x \in \mathbb{R}$$

Για $x = 1 \Rightarrow F(1) = f(1) + c \Rightarrow 0 = 3 + c \Rightarrow c = -3$

Επομένως:

$$F(x) = f(x) - 3 = x^3 + x - 2, \ x \in \mathbb{R}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έχουμε διαδοχικά και ισοδύναμα:

$$f'(x) + f(x) + 4e^{x-1} = \ln x + \frac{1}{x} + x + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x f'(x) + e^x f(x) + 4e^{2x-1} = e^x \ln x + e^x \frac{1}{x} + e^x x + e^x \Leftrightarrow$$

<=> $\left(e^x f(x) + 2e^{2x-1}\right)' = \left(e^x \ln x\right)' + \left(xe^x\right)' \Leftrightarrow \Leftrightarrow e^x f(x) + 2e^{2x-1} = e^x \ln x + xe^x + c$

για $x = 1$ έχουμε:

$$ef(1) + 2e = e\ln 1 + e + c \Leftrightarrow -e + 2e = 0 + e + c \Leftrightarrow c = 0$$

Άρα:

$$e^x f(x) + 2e^{2x-1} = e^x \ln x + xe^x \Leftrightarrow f(x) = \ln x + x - 2e^{x-1}$$

Δ2. Η συνάρτηση:

$$f(x) = \ln x + x - 2e^{x-1}$$

είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ (ως πράξεις και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $(0, +\infty)$) με:

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 1 - 2e^{x-1} \quad \text{και} \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2} - 2e^{x-1} < 0, x > 0$$

επομένως η f΄ είναι γνησίως φθίνουσα ˙
Παρατηρούμε ότι:

$$f'(1)=\frac{1}{1}+1-2e^{1-1}=0$$

Έχουμε:

$$\bullet x>1 \overset{f'\downarrow}{\Longrightarrow} f'(x)<f'(1)\Rightarrow f'(x)<0$$

$$\bullet x<1\Rightarrow f'(x)>f'(1)\Rightarrow f'(x)>0$$

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον επόμενο πίνακα:

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+		−
$f(x)$	↗		↘

Μονοτονία

- η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$
- γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$

Ακρότατα: η f παρουσιάζει για x=1 μέγιστο το

Εναλλακτικά

2ος τρόπος (για τον υπολογισμό του ακροτάτου).
Για κάθε $x>0$ εχουμε:

$$\ln x\le x-1 \text{ (I) και } e^{x-1}\ge x\Leftrightarrow -2e^{x-1}\le -2x \text{ (II)}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (I) και (II) έχουμε:

$$\ln x-2e^{x-1}\le -x-1\Leftrightarrow \ln x-2e^{x-1}+x\le -x-x+x\Leftrightarrow f(x)\le -1\Leftrightarrow f(x)\le f(1)$$

για κάθε $x>0$.
Επομένως η f παρουσιάζει στο 1 ολικό μέγιστο, το $f(1)=-1$

Δ3 . Είναι:

Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$f'(x)=\int_e^{e^2}\frac{f'(\ln t)}{t}dt\Leftrightarrow f'(x)=\left[f(\ln t)\right]_e^{e^2}=f(2)-f(1)$$

Για την f ισχύουν:

- Είναι συνεχής στο [1,2] (ως παραγωγίσιμη στο (0,+00)
- Είναι παραγωγίσιμη στο (1 ,2) (ως παραγωγίσιμη στο (0,+00)

αφού για την f ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ του διαφορικού , υπάρχει x_0 στο (1,2) τέτοιο , ώστε:

$$f'(x_o) = f(2) - f(1)$$

Η ρίζα x_0 είναι μοναδική στο διάστημα (1, 2) αφού η f΄ είναι γνησίως φθίνουσα άρα και «1-1».

Εναλλακτικά:

<u>2ος τρόπος</u>:

Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$\Lambda(x) = f'(x) + f(1) - f(2)$$

για την οποία ισχύουν:

- είναι συνεχής στο [1,2] (ως παραγωγίσιμη στο (0,+00)

$$\Lambda(1) = f'(1) + f(1) - f(2) = 0 + f(1) - f(2) > 0$$

διότι $1 < 2 \overset{f\downarrow}{\Rightarrow} f(1) > f(2) \Rightarrow f(1) - f(2) > 0$

$$\Lambda(2) = f'(2) + f(1) - f(2) = \frac{1}{2} + 1 - 2e - 1 - \ln 2 - 2 + 2e = -\frac{3}{2} - \ln 2 < 0$$

Από το Θ.Bolzano υπάρχει x_0 στο (1,2) τέτοιο, ώστε:

$$\Lambda(x_o) = 0 \Leftrightarrow f'(x_o) + f(1) - f(2) \Leftrightarrow f'(x_o) = f(2) - f(1)$$

Η ρίζα x_0 είναι μοναδική στο διάστημα (1,2) αφού η f' είναι γνησίως φθίνουσα άρα και 1-1.

Εναλλακτικά:

<u>3ος τρόπος</u>:

Έστω η συνάρτηση:

$$K(x) = f(x) - x \cdot (f(2) - f(1))$$

Για την f ισχύουν:

- Είναι συνεχής στο [1,2] (ως παραγωγίσιμη στο (0,+00)
- Είναι παραγωγίσιμη στο (1,2) (ως παραγωγίσιμη στο (0,+00)
- $k(1) = 2f(1) - f(2)$, $k(2) = 2f(1) - f(2)$

από το Θ.Rolle έχουμε :

υπάρχει x_0 στο (1,2) τέτοιο, ώστε:

$$k'(x_o) = 0 \Leftrightarrow f'(x_o) + f(1) - f(2) \Leftrightarrow f'(x_o) = f(2) - f(1)$$

Η ρίζα x_0 είναι μοναδική στο διάστημα (1,2) αφού η f' είναι γνησίως φθίνουσα άρα και «1-1».

Δ4. Η f παρουσιάζει για x=1 μέγιστο το f(1) άρα:

$$f(x) \le f(1) \Rightarrow f(x) \le -1 < 0$$

Επομένως :

$$f\left(\frac{1}{x}\right) < 0\left(\gamma\iota\alpha\tau\acute{\iota}\ \frac{1}{x} > 0\gamma\iota\alpha\kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon x > 0\right)$$

$$\left|h(x)\right| = \left|\frac{1}{x^2}\, f\left(\frac{1}{x}\right)\right| = \frac{1}{x^2}\left|f\left(\frac{1}{x}\right)\right| = -\frac{1}{x^2}\, f\left(\frac{1}{x}\right) \text{ για κάθε } x \in \left[\frac{1}{e}, 1\right]$$

το εμβαδόν του χωρίου ισούται με :

$$\mathrm{E} = \int_{\frac{1}{e}}^{1} \left|h(x)\right| dx = \int_{\frac{1}{e}}^{1} \left|\frac{1}{x^2}\, f\left(\frac{1}{x}\right)\right| dx = \int_{\frac{1}{e}}^{1} -\frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right) dx \overset{u=\frac{1}{x}}{=} \int_{e}^{1} f(u)\,du =$$

$$\int_{e}^{1} \left(\ln u + u - 2e^{u-1}\right) du = \int_{e}^{1} \left(u\ln u - u + \frac{u^2}{2} - 2e^{u-1}\right)' du = \frac{4e^{e-1} - e^2 - 5}{2}$$

Δ5. Η f παρουσιάζει για x=1 μέγιστο το f(1) άρα:

$$f(x) \le f(1) \Rightarrow f(x) \le -1 < 0$$

α) Η απόσταση των (A_λ,B_λ) είναι:

$$\left(\mathrm{A}_\lambda \mathrm{B}_\lambda\right) = \left|f(\lambda) - g(\lambda)\right| = \left|2f(\lambda)\right| = 2\left|f(\lambda)\right| = -2f(\lambda)$$

και γράφεται ως συνάρτηση του λ , $d(\lambda) = -2f(\lambda)$

$d'(\lambda) = -2f'(\lambda)$, $\quad d'(\lambda) \ge 0 \Leftrightarrow \quad f'(\lambda) \le 0 \Leftrightarrow \ \lambda \ge 1$

λ	0 1	+∞
$d'(\lambda)$	-	+
$d(\lambda)$	↘	↗

άρα η ελάχιστη τιμή είναι $d(1) = \left(\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\right) = -2f(1) = 2$

β)

$$\mathrm{E}(\lambda) = \frac{1}{2}\lambda\cdot\left(-2f(\lambda)\right) = -\lambda\cdot f(\lambda)$$

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\mathrm{E}(\lambda)}{\lambda^2+1} = \lim_{\lambda\to+\infty} -\frac{\lambda\left(\ln\lambda + \lambda - 2e^{\lambda-1}\right)}{\lambda^2+1} = -\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\lambda^2\left(\frac{\ln\lambda}{\lambda} + 1 - 2\frac{e^{\lambda-1}}{\lambda}\right)}{\lambda^2+1} =$$

$$-\lim_{\lambda\to+\infty}\left(\frac{\lambda^2}{\lambda^2+1}\right)\cdot\left(\frac{\ln\lambda}{\lambda} + 1 - 2\frac{e^{\lambda-1}}{\lambda}\right) = -1\cdot\left(0 + 1 - \infty\right) = +\infty$$

γιατί :

$$\bullet \lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\ln\lambda}{\lambda} \overset{D.L.H}{=} \lim_{\lambda\to+\infty}\frac{(\ln\lambda)'}{(\lambda)'} = \lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{\lambda} = 0$$

$$\bullet \lim_{\lambda\to+\infty}\frac{e^{\lambda-1}}{\lambda}\overset{D.L.H}{=}\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\left(e^{\lambda-1}\right)'}{(\lambda)'}=\lim_{\lambda\to+\infty}e^{\lambda-1}=+\infty$$

$$\bullet \lim_{\lambda\to+\infty}\left(\frac{\lambda^2}{\lambda^2+1}\right)=\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\lambda^2}{\lambda^2}=\lim_{\lambda\to+\infty}1=1$$

$$\lim_{\lambda\to0^+}\frac{\mathrm{E}(\lambda)}{\lambda^2+1}=\lim_{\lambda\to0^+}-\frac{\lambda\left(\ln\lambda+\lambda-2e^{\lambda-1}\right)}{\lambda^2+1}=-\lim_{\lambda\to0^+}\frac{\left(\ln\lambda+\lambda-2e^{\lambda-1}\right)}{\lambda+\frac{1}{\lambda}}\overset{D.L.H}{=}-\lim_{\lambda\to0^+}\frac{\frac{1}{\lambda}+1-2e^{\lambda-1}}{1-\frac{1}{\lambda^2}}=$$

$$-\lim_{\lambda\to0^+}\frac{\lambda+\lambda^2-2\lambda^2e^{\lambda-1}}{\lambda^2-1}=\frac{0+0-0}{0^2-1}=\frac{0}{-1}=0$$

8ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστο διάστημα $[a,\ \beta]$, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (a,β) και επιπλέον:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \text{ και } \lim_{x\to \beta^-} f(x) = f(\beta)$$

Α2. i. Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα αποδείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Πράγματι στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

οπότε έχουμε:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$$

Επειδή $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε $f(x_2) - f(x_1) > 0$, οπότε $f(x_1) < f(x_2)$.

ii.Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος <u>δεν</u> ισχύει.

Αντι-παράδειγμα:

Η συνάρτηση $f(x) = x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, όμως έχει παράγωγο $f'(x) = 3x^2$ η οποία δεν είναι θετική σε όλο το $\mathbb{R}$, αφού $f'(0) = 0$ (Ισχύει όμως $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Α3.α) Σωστό **β)** Λάθος **γ)** Σωστό **δ)** Λάθος **ε)** Σωστό

Αντιπαραδείγματα στις Λάθος προτάσεις:

β) Η συνάρτηση $f(x) = |x|, x \in \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$ χωρίς να είναι παραγωγίσιμη σε αυτό αφού:

δ) Έχουμε:

$$\int_0^{2\pi} \eta\mu x dx = -[\sigma\upsilon\nu x]_0^{2\pi} = -\sigma\upsilon\nu 2\pi - +\sigma\upsilon\nu 0 = 1 + 1 = 0$$

Αλλά δεν είναι $\eta\mu x = 0$ για κάθε $x \in [a,\beta]$.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι το $\mathbb{R}$. Έστω ότι η f είναι γνησίως μονότονη.

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Θα εξετάσουμε το είδος μονοτονίας της g (για το σκοπό αυτό θα εξετάσουμε το πρόσημο της διαφοράς):

$$g(x_1) - g(x_2) = \frac{f(x_1)}{f^2(x_1)+1} - \frac{f(x_2)}{f^2(x_2)+1} = \frac{f(x_1)\left(f^2(x_2)+1\right) - f(x_2)\left(f^2(x_1)+1\right)}{\left(f^2(x_2)+1\right)\left(f^2(x_1)+1\right)} =$$

$$= \frac{f(x_1)f(x_2)\left(f(x_2)-f(x_1)\right) - (f(x_2)-f(x_1))}{\left(f^2(x_2)+1\right)\left(f^2(x_1)+1\right)} = \frac{(f(x_2)-f(x_1))\left(f(x_1)f(x_2)-1\right)}{\left(f^2(x_2)+1\right)\left(f^2(x_1)+1\right)} \quad (1)$$

Έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} 0 < f(x_1) < 1 \\ 0 < f(x_2) < 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 < f(x_1)f(x_2) < 1 \Rightarrow f(x_1)f(x_2) - 1 < 0$$

και $\left(f^2(x_2)+1\right)\left(f^2(x_1)+1\right) > 0$

Άρα:

- Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ τότε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0 \Rightarrow g(x_1) - g(x_2) < 0 \Rightarrow g(x_1) < g(x_2)$$

δηλαδή η g είναι επίσης γνησίως αύξουσα.

- Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ τότε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) < 0 \Rightarrow g(x_1) - g(x_2) > 0 \Rightarrow g(x_1) > g(x_2)$$

δηλαδή η g είναι επίσης γνησίως φθίνουσα.

B2. Έστω ότι η f και g είναι και οι δύο γνησίως αύξουσες στο $\mathbb{R}$ ή και οι δύο γνησίως φθίνουσες στο $\mathbb{R}$ (αφού, σύμφωνα με το ερώτημα B1 έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας).

- f και g γνησίως αύξουσες στο $\mathbb{R}$

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Τότε έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) < g(x_2) \Rightarrow f(g(x_1) < f(g(x_2)) \Rightarrow (fog)(x_1) < (fog)(x_2)$$

δηλαδή η fog είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

- f και g γνησίως φθίνουσες στο $\mathbb{R}$.

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Τότε έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) > g(x_2) \Rightarrow f(g(x_1) < f(g(x_2)) \Rightarrow (fog)(x_1) < (fog)(x_2)$$

B3. Έχουμε διαδοχικά και ισοδύναμα:

$$(fog)(x^3+1) = (fog)(4x^2+2x) \Leftrightarrow x^3+1 = 4x^2+2x \Leftrightarrow x^3+1-4x^2-2x = 0$$

Θέτουμε: $h(x) = x^3+1-4x^2-2x,\ x \in \mathbb{R}$ και έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = -\infty,\ \lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty, h(0) = 1, h(1) = -4 < 0$$

Αφού $\lim_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$, υπάρχει $\alpha < 0$ τέτοιο, ώστε $h(a) < 0$ και αφού $\lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$ υπάρχει $\beta > 0$ τέτοιο, ώστε $h(\beta) > 0$.

Από το θεώρημα του Bolzano στα διαδοχικά διαστήματα $[\alpha,0]$, $[0,1]$, $[1,\beta]$ (στα οποία πληρούνται οι προϋποθέσεις αφού η $h(x)$ είναι συνεχής ως πολυωνυμική στο $\mathbb{R}$, άρα και στα διαστήματα αυτά) υπάρχουν $\xi_1 \in (\alpha,0), \xi_2 \in (0,1), \xi_3 \in (1,\beta)$ τέτοια, ώστε:

$$h(\xi_1) = h(\xi_2) = h(\xi_3) = 0 \text{ με } \xi_1,\xi_2 > 0 \text{ και } \xi_3 < 0 \text{ .}$$

Τέλος επειδή η $h(x)$ είναι πολυώνυμο 3ου βαθμού δεν μπορεί να έχει περισσότερες από 3 ρίζες και επομένες οι παραπάνω ρίζες είναι μοναδικές.

B4. Αφού η fog είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, έχουμε:

$$(\mathrm{fog})(x^3+4) > (\mathrm{fog})(3x^2) \Leftrightarrow x^3+4 > 3x^2 \Leftrightarrow x^3+4-3x^2 > 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2)^2 > 0 \Leftrightarrow x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$. Έχουμε διαδοχικά:

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1^3 = x_2^3 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η συνάρτηση f είναι «1-1» και επομένως είναι αντιστρέψιμη .
Για την εύρεση της αντίστροφης έχουμε:

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = x^3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{y}, & αν\ y \geq 0 \\ x = -\sqrt[3]{-y}, & αν\ y < 0 \end{cases}$$

Άρα:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, & αν\ x \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-x}, & αν\ x < 0 \end{cases}$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι σχετικά απλή (βλέπε εισαγωγή σχολικού βιβλίου)
Αφού η f είναι «1-1» οποιαδήποτε παράλληλη ευθεία προς τον άξονα $x'x$ τέμει την γραφική παράσταση C_f της f το πολύ σε ένα σημείο (ή ότι δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τετεγμένη)

Γ2. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως πολυωνυμική) με $f'(x) = 3x^2 > 0$, για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ και $x \in (0, +\infty)$ και αφού η f είναι συνεχής στο 0 είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[0, +\infty)$, επομένως είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = ημx - x + \dfrac{1}{6}x^3,\ x \geq 0$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $[0, +\infty)$) με:

$$g'(x) = συνx - 1 + \frac{1}{2}x^2,\ x \geq 0$$

Η συνάρτηση $g'(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $[0, +\infty)$) με:
$g''(x) = -ημx + x > 0$ για κάθε $x > 0$ (αφού $ημx < x \Leftrightarrow -ημx + x > 0$ για κάθε $x > 0$, η ισότητα $ημx = x$ ισχύει μόνο για $x = 0$). Ϊρα η συνάρτηση $g'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Άρα έχουμε:

$x > 0 \Rightarrow g'(x) > g'(0) \Rightarrow g'(x) > 0$, δηλαδή η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$

$x > 0 \Rightarrow g(x) > g(0) \Rightarrow g(x) > 0$.

Επομένως για κάθε $x > 0$ και επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ έχουμε:

$$g(x) > 0 \Leftrightarrow ημx > x - \frac{1}{6}x^3 \Rightarrow f(ημx) > f\left(x - \frac{1}{6}x^3\right)$$

Γ3. Έστω $M\left(x(t_0),\ y(t_0)\right)$ το σημείο της καμπύλης στο οποίο την χρονική στιγμή $t = t_0$ έχουμε

$x'(t_0) = y'(t_0)$. Για κάθε $t \geq 0$ έχουμε $y(t) = x^3(t)$. Παραγωγίζοντας τη σχέση αυτή για κάθε $t \geq 0$ έχουμε:

$$y'(t) = \left[x^3(t)\right]' \Leftrightarrow y'(t) = 3x^2(t) \cdot x'(t)$$

Για $t = t_0$ έχουμε:

$$y'(t_0) = 3x^2(t_0) \cdot x'(t_0) \Leftrightarrow x'(t_0) = 3x^2(t_0) \cdot x'(t_0) \Leftrightarrow 3x^2(t_0) = 1 \Leftrightarrow x^2(t_0) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x(t_0) = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Άρα δεκτή τιμή η $x(t_0) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, οπότε $y(t_0) = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \dfrac{\sqrt{3}}{9}$. Επομένως το ζητούμενο σημε'ιο της καμπύλης για το οποίο $x'(t_0) = y'(t_0)$ είναι $M\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{9}\right)$.

Μια φυσική ερμηνεία του προβλήματος είναι η επόμενη:

Όταν το κινητό (σημείο) κινείται πάνω στην καμπύλη $y(t) = x^3(t)$ την χρονική στιγμή κατά την οποία το κινητό διέρχεται από το σημείο $M\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{9}\right)$ η συνιστώσα της ταχύτητας στον άξονα $x'x$ (οριζόντια συνιστώσα) είναι ίση με την συνιστώσα της ταχύτητας στον άξονα $y'y$ (κατακόρυφη συνιστώσα).

Γ4. Για το ολοκήρωμα:

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx = \int_{-1}^{1} f(x)g(-x)dx$$

αφού η g είναι άρτια $g(x) = g(-x)$ για κάθε $x \in [-1,1]$ θέτουμε:

$$-x = u \Leftrightarrow x = -u$$

$$dx = -du$$

$$x = -1 \Leftrightarrow u = 1$$

$$x = 1 \Leftrightarrow u = -1$$

Άρα έχουμε διαδοχικά:

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx = \int_{-1}^{1} f(x)g(-x)dx = \int_{-1}^{1} x^3 g(-x)dx = -\int_{1}^{-1} (-u)^3 g(u)du =$$

$$= \int_{-1}^{1} (-u)^3 g(u)du = -\int_{-1}^{1} u^3 g(u)du = -I$$

Επομένως:

$$I = -I \Leftrightarrow 2I = 0 \Leftrightarrow I = 0$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Το κοινό πεδίο ορισμού των συναρτήσεων είναι το $\Delta = \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$

Η συνάρτηση f είναι παράγουσα της $-3\eta\mu^3 x$ στο $\Delta = \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, άρα $f'(x) = -3\eta\mu^3 x$

Επίσης:
$g'(x) = (3\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu^3 x)' = 3\eta\mu x + 3\sigma\upsilon\nu^2 x\eta\mu x = -3\eta\mu x(1-\sigma\upsilon\nu^2 x) = -3\eta\mu^3 x$
άρα $f'(x) = g'(x) \Rightarrow f(x) = g(x) + c$ (1)

Για $x = -\frac{\pi}{2}$ έχουμε:

$$g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 3\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \sigma\upsilon\nu^3\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

, οπότε η (1) για $x = -\frac{\pi}{2}$ γίνεται:
$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = g\left(-\frac{\pi}{2}\right) + c$ ή $c = 0$ άρα $f(x) = g(x)$ στο διάστημα $\Delta = \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$.

Δ2. Για κάθε $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow -x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Επίσης

$g(-x) = 3\sigma\upsilon\nu(-x) - \sigma\upsilon\nu^3(-x) = 3\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu^3 x = g(x)$ άρα η g είναι άρτια.

Έχουμε:
$g(-x) = g(x) \Rightarrow \left(g(-x)\right)' = g'(x) \Rightarrow g'(-x)\cdot(-x)' = g'(x) \Rightarrow -g'(-x) = g'(x)$ άρα η g' είναι περιττή.
(Ισχύει ότι : Αν μια συνάρτηση f είναι περιττή, τότε η f' είναι άρτια. Επίσης αποδεικνύεται ότι αν μια συνάρτηση f είναι άρτια, τότε η f' είναι περιττή.
Οι προτάσεις αυτές για να χρησιμοποιηθούν πρέπει να αποδειχθούν).

Δ3. α) Έχουμε $f'(x) = -3\eta\mu^3 x > 0$ για κάθε $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$. Επίσης $f''(x) = -9\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu x < 0$ για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, άρα η f είναι κοίλη. Η μονοτονία και η κυρτότητα της f φαίνεται συνοπτικά στον διπλανό πίνακα μεταβολών, όπου παρατηρούμε ότι η f έχει ελάχιστο στο $-\frac{\pi}{2}$ το $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$, μέγιστο στο

0 το $f(0)=g(0)=2$ και δεν έχει σημεία καμπής.

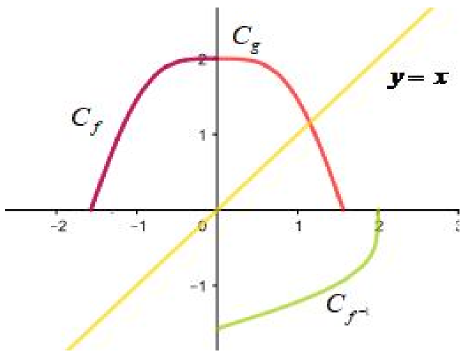
x	$-\pi/2$		0
$f'(x)$		$+$	
$f''(x)$		$-$	
$f(x)$		↗	

β) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και 1-1, άρα αντιστρέφεται.

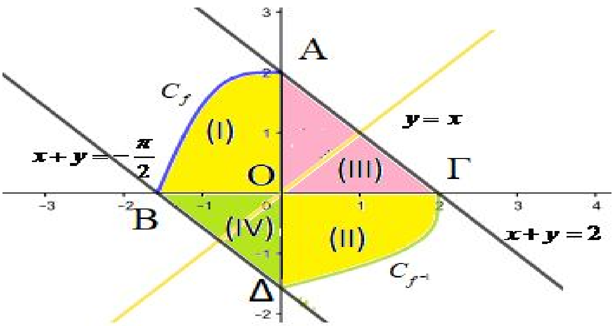
Έχουμε: $-\dfrac{\pi}{2}\le x\le 0 \Rightarrow f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\le f(x)\le f(0)\Rightarrow 0\le f(x)\le 2$

άρα το σύνολο τιμών είναι το σύνολο $[0,2]$ το οποίο είναι και πεδίο ορισμού της f^{-1}.

Δ4 .Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f , f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς τη διχοτόμο του 1ου και του 3ου τεταρτημορίου.



Δ5.



$$\mathrm{E} = (\mathrm{I}) + (\mathrm{III}) + (\mathrm{II}) + (\mathrm{IV}) = \mathrm{E}_{\mathrm{AOB}} + \mathrm{E}_{\mathrm{AO\Gamma}} + \mathrm{E}_{\mathrm{\Gamma O\Delta}} + \mathrm{E}_{\mathrm{\Delta OB}}$$

Λόγω συμμετρίας τα χωρία (I) και (II) είναι ισεμβαδικά, άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι $\mathrm{E} = 2\mathrm{E}_{\mathrm{AOB}} + \mathrm{E}_{\mathrm{AO\Gamma}} + \mathrm{E}_{\mathrm{\Delta OB}}$

$$\mathrm{E}_{\mathrm{AOB}} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} (3\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu^3 x)dx = 3\left[\eta\mu x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sigma\upsilon\nu^3 x dx = 3 - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sigma\upsilon\nu^2 x \sigma\upsilon\nu x dx =$$

$$= 3 - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} (1-\eta\mu^2 x)(\eta\mu x)' dx = 3 - \int_{-1}^{0} (1-u^2)du = \ldots = \frac{7}{3}$$

$$u = \eta\mu x \Rightarrow du = \sigma\upsilon\nu x dx$$

*Θέτουμε $x = 0 \Rightarrow u = 0$, οπότε για,

$$x = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 1$$

$$\mathrm{E}_{\mathrm{AO\Gamma}} = \frac{(0\mathrm{A})\cdot(0\Gamma)}{2} = \frac{2\cdot 2}{2} = 2 \text{ τ.μ. και } \mathrm{E}_{\mathrm{\Delta OB}} = \frac{(0\mathrm{B})\cdot(0\Delta)}{2} = \frac{\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi^2}{8} \text{ τ.μ.}$$

Άρα

$$\mathrm{E} = 2\mathrm{E}_{\mathrm{AOB}} + \mathrm{E}_{\mathrm{AO\Gamma}} + \mathrm{E}_{\mathrm{\Delta OB}} = 2\cdot\frac{7}{3} + 2 + \frac{\pi^2}{8} = \frac{20}{3} + \frac{\pi^2}{8} \text{ τ.μ}$$

Δ6. α) Το σημείο

$$\mathrm{A}\left(\frac{5\sqrt{2}}{4}, -\frac{\pi}{4}\right) \in C_{f^{-1}} \Leftrightarrow f^{-1}\left(\frac{5\sqrt{2}}{4}\right) = -\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{5\sqrt{2}}{4} = f\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{5\sqrt{2}}{4} = 3\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \sigma\upsilon\nu^3\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \frac{5\sqrt{2}}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow \frac{5\sqrt{2}}{4} = \frac{5\sqrt{2}}{4}$$

το οποίο ισχύει.

β) Η κλίση της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο $\mathrm{A}\left(\frac{5\sqrt{2}}{4}, -\frac{\pi}{4}\right)$ είναι ο αριθμός $(f^{-1})'\left(\frac{5\sqrt{2}}{4}\right)$.

Έχουμε:

$$\left(fof^{-1}\right)(x) = x \Rightarrow f(f^{-1}(x)) = x \Rightarrow \left(f(f^{-1}(x))\right)' = 1 \Rightarrow f'(f^{-1}(x))\cdot\left(f^{-1}(x)\right)' = 1$$

Για $x=\frac{5\sqrt{2}}{4}$ έχουμε:

$$f'\left(f^{-1}\left(\frac{5\sqrt{2}}{4}\right)\right)\cdot\left((f^{-1})'\left(\frac{5\sqrt{2}}{4}\right)\right)=1\Leftrightarrow f'\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\left((f^{-1})'\left(\frac{5\sqrt{2}}{4}\right)\right)=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{3\sqrt{2}}{4}\cdot\left((f^{-1})'\left(\frac{5\sqrt{2}}{4}\right)\right)=1\Leftrightarrow(f^{-1})'\left(\frac{5\sqrt{2}}{4}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

.

9ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Εστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0, όταν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Α2.

i. Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $x_1, x_2 \in \Delta$. Πράγματι:

♦ Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$.

♦ Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \qquad (1)$$

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ, ισχύει $f'(\xi) = 0$, οπότε, λόγω της (1), είναι $f(x_1) = f(x_2)$. Αν $x_2 < x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1) = f(x_2)$. Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

ii. Η πρόταση:

«Αν η f είναι κυρτή στο Δ, τότε $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ» είναι **Ψευδής.**

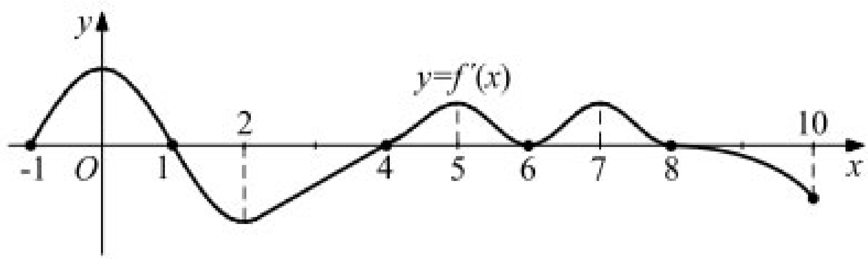
Αντιπαράδειγμα:

Η συνάρτηση $f(x) = x^4$ είναι είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 4x^3$. Η $f'(x) = 4x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και άρα η f είναι κυρτή. Ωστόσο $f''(x) = 12x^2$ για την οποία δεν ισχύει $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αφού $f''(0) = 0$.

Α3. α) Λάθος, **β)** Σωστό, **γ)** Σωστό, **δ)** Λάθος, **ε)** Σωστό.

ΘΕΜΑ Β

Β1.



α.

♦ Η f στο διάστημα $[-1,1]$ είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη σ΄αυτό και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (-1,1)$. Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-1,1]$.

♦ Η f στο διάστημα $[1,4]$ είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη σ΄αυτό και ισχύει $f'(x) < 0$

για κάθε $x \in (1,4)$. Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1,4]$.

- Η f στο διάστημα $[4,6]$ είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη σ΄αυτό και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (4,6)$. Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[4,6]$.
- Η f στο διάστημα $[6,8]$ είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη σ΄αυτό και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (6,8)$. Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[6,8]$.

(Μπορούμε να πούμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[4,8]$)

- Η f στο διάστημα $[8,10]$ είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη σ΄αυτό και ισχύει $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (8,10)$. Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[8,10]$.

β.

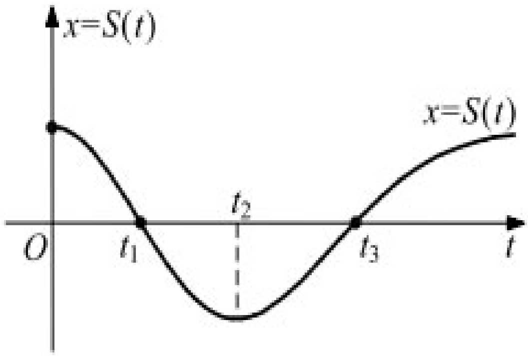
- Η f στο διάστημα $[-1,0]$ είναι συνεχής και η f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-1,0)$. Επομένως η f είναι κυρτή (στρέφει τα κοίλα προς τα άνω) στο διάστημα $[-1,0]$.
- Η f στο διάστημα $[0,2]$ είναι συνεχής και η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,2)$. Επομένως η f είναι κοίλη (στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω) στο διάστημα $[0,2]$.
- Η f στο διάστημα $[2,5]$ είναι συνεχής και η f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(2,5)$. Επομένως η f είναι κυρτή (στρέφει τα κοίλα προς τα άνω) στο διάστημα $[2,5]$.
- Η f στο διάστημα $[5,6]$ είναι συνεχής και η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(5,6)$. Επομένως η f είναι κοίλη (στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω) στο διάστημα $[5,6]$
- Η f στο διάστημα $[6,7]$ είναι συνεχής και η f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(6,7)$. Επομένως η f είναι κυρτή (στρέφει τα κοίλα προς τα άνω) στο διάστημα $[6,7]$
- Η f στο διάστημα $[7,10]$ είναι συνεχής και η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο
- διάστημα $(7,10)$. Επομένως η f είναι κοίλη (στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω) στο διάστημα $[7,10]$.

γ.

- Πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων είναι τα σημεία 1,4,6,8 που είναι εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού της και στα οποία η f' μηδενίζεται, καθώς και τα σημεία -1,10 που είναι άκρα του πεδίου ορισμού της της f. Οι αριθμοί 1, 8 είναι θέσεις τοπικών μεγίστων, ενώ οι αριθμοί -1, 4, 10 είναι θέσεις τοπικών ελαχίστων. Ο αριθμός 6 δεν είναι θέση τοπικού ακροτάτου αφού η η f' δεν αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του 6.

Τέλος τα σημεία 0, 2, 5, 6, 7 είναι θέσεις σημείων καμπής, αφού σε αυτά η f είναι συνεχής και αλλάζει η μονοτονία της f'.

Β2.



α. Επειδή η συνάρτηση S είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[0,t_2\right]$ το κινητό για $t\in\left[0,t_2\right]$ κινείται κατά την αρνητική φορά.
Επειδή η η συνάρτηση S είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[t_2,+\infty\right)$ το κινητό για $t\geq t_2$ κινείται κατά την θετική φορά.
β. Γνωρίζουμε ότι η ταχύτητα του κινητού είναι $u(t)=S'(t)$ και ότι τις χρονικές στιγμές t_1,t_3 παρουσιάζει καμπή. Από το δοθέν σχήμα έχουμε:

- Στο διάστημα $\left[0,t_1\right]$ η S στρέφει τα κοίλα κάτω και άρα η $u(t)=S'(t)$ είναι γνησίως φθίνουσα σε αυτό. Δηλαδή η ταχύτητα μειώνεται.
- Στο διάστημα $\left[t_1,t_3\right]$ η S στρέφει τα κοίλα άνω και άρα η $u(t)=S'(t)$ είναι γνησίως αύξουσα σε αυτό. Δηλαδή η ταχύτητα αυξάνεται.
- Στο διάστημα $\left[t_3,+\infty\right)$ η S στρέφει τα κοίλα κάτω και άρα η $u(t)=S'(t)$ είναι γνησίως φθίνουσα σε αυτό. Δηλαδή η ταχύτητα μειώνεται.

Ένας ενδεικτικός πίνακας μεταβολών της ταχύτητας είναι ο επόμενος:

t	0 $\quad t_1$	t_3	$+\infty$
$u(t)=S'(t)$	↘	↗	↘

Άρα, ταχύτητα του κινητού αυξάνεται στο διάστημα $\left[t_1,t_3\right]$ και στα διαστήματα $\left[0,t_1\right]$ και $\left[t_3,+\infty\right)$ μειώνεται.

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Γ1. Για να είναι η f αντιστρέψιμη στο πεδίο ορισμού της $D_f=(-2,+\infty)$ αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι συνάρτηση «1-1». Έστω $x_1,x_2>-2$ με $f(x_1)=f(x_2)$. Έχουμε διαδοχικά:

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow e^{f(x_1)}=e^{f(x_2)}\Rightarrow f(e^{f(x_1)})=f(e^{f(x_2)})\Rightarrow \ln(x_1+4)=\ln(x_2+4)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_1+4=x_2+4\Rightarrow x_1=x_2$$

Άρα η συνάρτηση f είναι «1-1».

Γ2. Έχουμε:

$(fof)(e^{f(x)}) = \ln(\ln(x+4)+2) \Leftrightarrow f(f(e^{f(x)}) = \ln(\ln(x+4)+2) \Rightarrow f(\ln(x+4) = \ln(\ln(x+4)+2)$ (1)

Θέτουμε: $\ln(x+4) = y,\ y+2>0$ και η **(1)** γίνεται:

$$f(y) = \ln(y+2),\ y>-2 \text{ ή } f(x) = \ln(x+2), x>-2$$

Η γραφική της παράσταση είναι η γνωστή λογαριθμική καμπύλη που τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $\mathrm{A}(-1,\ 0)$ (να την σχεδιάσετε).

Γ3. Το πεδίο ορισμού της fof είναι:

$$D_{fof} = \{x>-2 /\ f(x)>-2\} = \{x>-2 / \ln(x+2)>-2\} = \left\{x>-2 / x>\frac{1}{e^2}-2\right\} = \left(\frac{1}{e^2}-2,+\infty\right)$$

Για κάθε $x \in \left(\frac{1}{e^2}-2,+\infty\right)$ έχουμε:

$$(fof)(x) = f(e^{-x}+2) \Leftrightarrow f(f(x)) = f(e^{-x}+2) \Leftrightarrow f(x) = e^{-x}+2 \Leftrightarrow f(x)-e^{-x}-2=0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = f(x)-e^{-x}-2 = \ln(x+2)-e^{-x}-2,\ x>-2$$

και εφαρμόζουμε το Θ.Bolzano στο διάστημα $[e^2-2, e^3-2] \subset \left(\frac{1}{e^2}-2,+\infty\right)$. Είναι:

- Η g είναι συνεχής στο $[e^2-2, e^3-2]$, ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων στο $[e^2-2, e^3-2]$.
- $g(e^2-2) = \ln e^2 - e^{-(e^2-2)} - 2 = -e^{-(e^2-2)} < 0$
- $g(e^3-2) = \ln e^3 - e^{-(e^3-2)} - 2 = 1-e^{-(e^3-2)} = 1-\frac{1}{e^{(e^3-2)}} > 0$

δηλαδή: $g(e^2-2)\cdot g(e^3-2) < 0$, οπότε ισχύει το Θ.Bolzano.

Άρα υπάρχει ένα , τουλάχιστον, $x_0 \in (e^2-2,\ e^3-2)$ έτσι ώστε :

$$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow (fof)(x_0) = f(e^{-x_0}+2)$$

Γ4. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη για $x>-2$ με:

$$f'(x) = \frac{1}{x+2}, x>-2\ .$$

Η f' είναι επίσης παραγωγίσιμη $x>-2$ με:

$$f''(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} < 0 \text{ για κάθε } x>-2.$$

Επομένως η f είναι κοίλη (στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω) ή ότι η f' είναι γνησίως φθίνουσα για $x>1$. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής για την f στα διαστήματα:

$$\left[x_1, \frac{x_1+x_2}{2}\right] \subset (-2,+\infty),\ \left[\frac{x_1+x_2}{2}, x_2\right] \subset (-2,+\infty)$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμη σε αυτά (άρα και συνεχής) διότι είναι παραγωγίσιμη στο

$(-2,+\infty)$.

Άρα υπάρχουν αντίστοιχα, τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in \left(x_1, \dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$ και τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in \left(\dfrac{x_1+x_2}{2}, x_2\right)$, τέτοια ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right) - f(x_1)}{\dfrac{x_1+x_2}{2} - x_1} = 2\frac{f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad (I)$$

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_2) - f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)}{x_2 - \dfrac{x_1+x_2}{2}} = 2\frac{f(x_2) - f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)}{x_2 - x_1} \quad (II)$$

Έχουμε διαδοχικά:

$$\xi_1 < \xi_2 \Rightarrow f'(\xi_1) > f'(\xi_2) \Rightarrow 2\frac{f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 2\frac{f(x_2) - f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)}{x_2 - x_1} \Rightarrow f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(2+h)-g(2-h)}{h} = 0 \Leftrightarrow \lim_{h\to 0}\frac{g(2+h)-g(2)-\left[g(2-h)-g(2)\right]}{h} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h\to 0}\left[\frac{g(2+h)-g(2)}{h} - \frac{g(2-h)-g(2)}{h}\right] = 0 \ (1)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(2+h)-g(2)}{h} = \lim_{x\to 2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2} = g'(2) \ (2) \ (2+h = x \text{ και g } \textit{παραγωγίσιμη})$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(2-h)-g(2)}{h} = \lim_{x\to 2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2} = g'(2) \ (3) \ (2-h = x \text{ και g } \textit{παραγωγίσιμη})$$

$$(1), (2), (3) \Rightarrow g'(2) - \left(-g'(2)\right) = 0 \Leftrightarrow 2g'(2) = 0 \Leftrightarrow g'(2) = 0$$

Δ2.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^x(x^2+x+2) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x+2}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2+x+2)'}{(e^{-x})'} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x+1}{-e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{e^{-x}} = 0$$

Άρα η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη.

Δ3. Έχουμε:

$$f'(x) = e^x(x^2 + x + 2) > 0 \Rightarrow f \uparrow \text{ στο } \mathbb{R} \quad \text{με:}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^x(x^2 + x + 2) = (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty$$

Άρα το σύνολο τιμών είναι $(0, +\infty)$

Στον επόμενο πίνακα φαίνεται η μονοτονία της f

x	$-\infty$		$+\infty$
f'		$+$	
f	0	$\nearrow$	$+\infty$

Δ4. Το σημείο $B(x, f(x))$ της C_h απέχει απόσταση από το $A(2,0)$:

$$(AB) = d(x) = \sqrt{(x-2)^2 + (f(x) - 0)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + \left(\sqrt{f(x)}\right)^2},\ x \in \mathbb{R}$$

$$d'(x) = \frac{2(x-2) + f'(x)}{2\sqrt{(x-2)^2 + f(x)}} = \frac{2(x-2) + e^x(x^2 + x + 2)}{2\sqrt{(x-2)^2 + f(x)}}$$

Θα μελετήσουμε πρώτα τη συνάρτηση $t(x) = 2(x-2) + e^x(x^2 + x + 2)$ ως προς το πρόσημό της.

Η εξίσωση $t(x) = 0$ έχει προφανής λύσης την $x = 0$ και:

$$t'(x) = 2 + e^x(x^2 + 5x + 7) > 0 \ (e^x > 0,\ x^2 + 5x + 7 > 0)$$

Το πρόσημο της $t(x)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
t'		$+$		$+$	
$d' = t$	$-\infty$	$-$ $\nearrow$	0	$\nearrow$ $+$	$+\infty$

Το πρόσημό της $d(x)$ φαίνεται στον πίνακα:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
d'	$-$		$+$
d	$\searrow$		$\nearrow$

$\min d(0) = \sqrt{7}$

Οπότε το σημείο B είναι $\mathrm{B}\left(0, h(0)\right)$ ή $\mathrm{B}\left(0, \sqrt{f(0)}\right)$ ή $\mathrm{B}\left(0, \sqrt{3}\right)$

Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_h στο σημείο B είναι:

$\lambda_\varepsilon = h'(0) = \dfrac{f'(0)}{2\sqrt{f(0)}} = \dfrac{4}{2\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ και ο συντελεστής διεύθυνσης της AB είναι

$\lambda_{\mathrm{AB}} = \dfrac{0-\sqrt{3}}{2-0} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ και άρα: $\lambda_{\mathrm{AB}} \cdot \lambda_\varepsilon = \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \dfrac{2\sqrt{3}}{3} = -1$

Επομένως: $(\varepsilon) \perp \mathrm{AB}$

Δ5. Από τη σχέση: $g(2) + xg(x) - g(x+2) - \left(f(x)-3\right)^2 \leq 0$ αν θέσουμε $H(x) = g(2) + xg(x) - g(x+2) - \left(f(x)-3\right)^2$ έχουμε $H(x) \leq H(0)$, δηλαδή η συνάρτηση $H: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έχει μέγιστο στο 0. Το 0 είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της $H(x)$ και παραγωγίσιμη στο 0 άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Fermat, άρα $H'(0) = 0$.

Όμως ισχύει:

$$H'(x) = g(x) + xg'(\mathrm{x}) - g'(\mathrm{x}+2) - 2(f(x)-3) \cdot f'(\mathrm{x}), x \in \mathbb{R}$$

Για $x = 0 \Rightarrow H'(0) = 0 \Rightarrow g(0) - g'(2) - 2(f(0)-3) \cdot f'(0) = 0 \Rightarrow g(0) = g'(2) = 0$ (I)

Έχουμε από τα παραπάνω και τη σχέση (I): $\int_{g(0)}^{g(a)} f(x)dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^{g(a)} f(x)dx = 0$

- Αν $g(a) > 0$ και επειδή $f(x) > 0 \Rightarrow \int_0^{g(a)} f(x)dx > 0$ άτοπο.
- Αν $g(a) < 0$ και επειδή $f(x) > 0 \Rightarrow \int_0^{g(a)} f(x)dx < 0$ άτοπο.

Άρα $g(a) = 0$ (II).

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Rolle για τη συνάρτηση $W(x) = g(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x$ στο διάστημα

$[0,\ a]$.

- $W(x)$ παραγωγίσιμη στο $[0,\ a]$ (γινόμενο παραγωγίσιμων), οπότε και συνεχής στο $[0,\ a]$

- $W(0) = g(0) \cdot \text{συν}0 = 0$

- $W(a)=\text{g}(\alpha) \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha = 0$

Άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, \alpha)$: $W(x_0) = 0$. Είναι όμως:

$$W'(x) = g'(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x - g(x) \cdot \text{ημx} \quad .$$

Έχουμε:

$$g'(x_0) \cdot \sigma\upsilon\nu x_0 - g(x_0) \cdot \text{ημ}x_0 = 0 \Leftrightarrow g'(x_0) = g(x_0) \cdot \frac{\text{ημ}x_0}{\sigma\upsilon\nu x_0} \Leftrightarrow g'(x_0) = g(x_0) \cdot \varepsilon\varphi x_0$$

10ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία-απόδειξη (Σχολικό βιβλίο)
Α2. α) Θεωρία-διατύπωση (Σχολικό βιβλίο) **β)** Θεωρία-ορισμός (Σχολικό βιβλίο)
Α3. α. Σωστό **β.**Λάθος **γ.** Σωστό **δ.** Σωστό **ε.** Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έστω t_1 ο χρόνος που χρειάζεται ο κολυμβητής για να κολυμπήσει από το Κ στο Μ και t_2 ο που χρειάζεται για να περπατήσει από το Μ στο Σ. Έχουμε:

$$t_1 = \frac{(KM)}{u_1} = \frac{\sqrt{x^2+100^2}}{3} \quad \text{και} \quad t_2 = \frac{(M\Sigma)}{u_2} = \frac{300-x}{5}$$

Επομένως, ο συνολικός χρόνος για να διανύσει τη διαδρομή ΚΜΣ είναι:

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2+100^2}}{3} + \frac{300-x}{5}$$

Β2. Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2+100^2}}{3} + \frac{300-x}{5},\ x \in (0,300)$$

Είναι:

$$T'(x) = \frac{x}{3\sqrt{x^2+100^2}} - \frac{1}{5}$$

Οι ρίζες της $T(x) = 0$ είναι το 75.

Το πρόσημο της $T'(x)$, η μονοτονία και τα ακρότατα της Τ φαίνονται στον επόμενο πίνακα:

Δηλαδή η συνάρτηση Τ παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 75\,ft$
Άρα όταν, $x = 75\,ft$ τότε ο κολυμβητής χρειάζεται το λιγότερο δυνατό χρόνο για να φθάσει στο σπίτι του.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης:

$$f(x) = \ln(e^x - 1) - x$$

είναι:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, e^x - 1 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, e^x > 1\} = (0,+\infty)$$

Γ2. Η f είναι συνεχής και δεν έχει ρίζα διότι αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $x_0 \in (0,+\infty)$, ώστε:
$\ln(e^{x_0}-1) - x_0 = 0 \Leftrightarrow \ln(e^{x_0}-1) = x_0 \Leftrightarrow \ln(e^{x_0}-1) = \ln e^{x_0} \Leftrightarrow e^{x_0} - 1 = e^{x_0} \Leftrightarrow -1 = 0$,που είναι άτοπο. Άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα $(0,+\infty)$. Δίνοντας μια τιμή στο $(0,+\infty)$ π.χ. για $x = 1$: $f(1) = \ln(e-1) - 1 = \ln\frac{e-1}{e} < 0 \left(0 < \frac{e-1}{e} < 1\right)$. Άρα $f(x) < 0$,

για κάθε $x \in (0,+\infty)$.

Γ3. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με: $f'(x) = \dfrac{e^x}{e^x-1} - 1 = \dfrac{1}{e^x-1} > 0$, για κάθε $x \in (0,+\infty)$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,+\infty)$.

Γ4. Η f ως γνησίως μονότονη συνάρτηση είναι και «1-1». Άρα η f αντιστρέφεται: Για την εύρεση της αντίστροφης έχουμε:

$$y = \ln(e^x-1) - x \Leftrightarrow y = \ln(e^x-1) - \ln e^x \Leftrightarrow y = \ln\frac{e^x-1}{e^x} \Leftrightarrow \frac{e^x-1}{e^x} = e^y \Leftrightarrow e^x - 1 = e^y e^x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x - e^y e^x = 1 \Leftrightarrow e^x(1-e^y) = 1 \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{1-e^y} \Leftrightarrow x = \ln\frac{1}{1-e^y}$$

Πρέπει: $1 - e^x > 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$. Άρα $f^{-1}(x) = \ln\dfrac{1}{1-e^x},\ x < 0$

Γ5. Θεωρούμε τη συνάρτηση: $\Phi(x) = f(x) - h(x),\ x > 0$. Είναι:

$$\Phi'(x) = f'(x) - h'(x) = f'(x) + \frac{1}{x} > 0 \ \text{, για κάθε } x > 0$$

Άρα η $\Phi(x)$ είναι γνησίως αύξουσα και το σύνολο τομώς της είναι:

$$\left(\lim_{x\to 0^+}\Phi(x), \lim_{x\to+\infty}\Phi(x)\right) = (-\infty,+\infty)$$

διότι:

$$\lim_{x\to 0^+}\Phi(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(f(x) - h(x)\right) = -\infty - \infty = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\Phi(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - h(x)\right) = 0 - (-\infty) = +\infty$$

Επομένως υπάρχει $x_0 > 0$ τέτοιο, ώστε:

$$\Phi(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - h(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = h(x_0)$$

Γ6. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(1)x^3 + x^2 + 2}{f(2)x^2 - x + 1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(1)x^3}{f(2)x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(1)}{f(2)}x = +\infty \ \ (f(1) < 0,\ f(2) < 0)$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έχουμε διαδοχικά:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x)'f(x)dx = \left[xf(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} xf'(x)dx = \frac{\pi}{2}f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)dx = \frac{\pi}{2}f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2} - u\right)f(u)du = \frac{\pi}{2}f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u)du + \int_0^{\frac{\pi}{2}} uf(u)du \ \ (1)$$ [6]

Επειδή ισχύει: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u)du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} uf(u)du = 1$ (2) έχουμε από τις σχέσεις (1) και(2):

$$1 = \frac{\pi}{2}f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} + 1 \Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

---

[6] Θέτω $u = \dfrac{\pi}{2} - x$

Τώρα έχουμε:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f(0)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u)du=1$$

Άρα:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f(0)=1\Rightarrow 1-f(0)=1\Rightarrow f(0)=0$$

Ακόμα από τη σχέση: $f'(x)=f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ για $x=0\Rightarrow f'(0)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$

Δ2. Η συνάρτηση g είναι σταθερή γιατί είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση με παράγωγο $g'(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Πραγματικά, καθώς $f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=f'(x)$ για x το $\frac{\pi}{2}-x$ έχουμε:

$$f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=f'\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=f\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)\Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=f(x) \text{ και },$$

$$g'(x)=2f(x)f'(x)-2f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)f'\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=2f(x)f'(x)-2f(x)f'(x)=0$$

Μάλιστα η τιμή της συνάρτησης g είναι:

$$g(x)=g(0)\Leftrightarrow g(x)=f^2(0)+f^2\left(\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow g(x)=1\,(3)$$

Δ3. Εφόσον $g(x)=f^2(x)+f^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, ολοκληρώνοντας προκύπτει:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx$$

Αλλά από την (3) έχουμε $g(x)=1$, και με την αντικατάσταση $u=\frac{\pi}{2}-x$ στο 2ο ολοκλήρωμα, παίρνουμε:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(u)du\Leftrightarrow\frac{\pi}{2}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)dx\Leftrightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)dx=\frac{\pi^2}{4}$$

Δ4. Από τον ορισμό της συνάρτησης g και λόγω της (3) έχουμε ότι: $f^2(x)+f^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=1$

Από όπου προκύπτει ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει: $|f(x)|\le 1\Leftrightarrow -1\le f(x)\le 1$ (4)

Όμως στο Δ1 είδαμε ότι $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ (σχέση 1), που σε συνδυασμό με την προηγούμενη σχέση μας δίνει $f(x)\le f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, δηλαδή η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0=\frac{\pi}{2}$.

Δ5. Στο Δ1 αποδείξαμε ότι $f'(0)=1$ και $f(0)=0$. Σε συνδυασμό με τον ορισμό της παραγώγου έχουμε:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\Rightarrow 1=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$$

Λόγω της (4) παίρνουμε ότι $|f(e^x)|\le 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Οπότε για $x\neq 0$ έχουμε:

$$\left|\frac{f(e^x)}{x}\right|\le\frac{1}{|x|}\Leftrightarrow -\frac{1}{|x|}\le\frac{f(e^x)}{x}\le\frac{1}{|x|}$$

Εφαρμόζοντας το κριτήριο παρεμβολής, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(e^x)}{x}$ με $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(e^x)}{x}=0$.

Οι λύσεις των διαγωνισμάτων διαγωνίσματα 11-15 θα δοθούν σε τακτικές ημερομηνίες στην εκπαιδευτική πλατφόρμα (που θα βρείτε στο iblogs.sch.gr/iokaragi).

2.2. Λύσεις Θεμάτων Πανελλαδικών Εξετάσεων