

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ
ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΣΑΒΒΑΤΟ, 15 ΜΑΡΤΙΟΥ 2025

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ
ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΕΞΙ (6)

ΘΕΜΑ Α

A1.i. Να διατυπώσετε το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών (**Μονάδες 2**) και στη συνέχεια να το αποδείξετε (**Μονάδες 4**).

ii. Να δώσετε ένα παράδειγμα, σχεδιάζοντας ένα πρόχειρο σχήμα, μιας συνάρτησης f που δεν είναι συνεχής στο διάστημα $[α,β]$ η οποία **δεν** παίρνει υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές ανάμεσα στα $f(α)$, $f(β)$ (**Μονάδες 2**).

A2. Να βρείτε το **λάθος** στον επόμενο συλλογισμό (**Μονάδες 2**). Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας (**Μονάδες 2**).

$$I = \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{1+\frac{1}{u^2}} \cdot \left(-\frac{1}{u^2}\right) du = -\int_{-1}^1 \frac{1}{1+u^2} du = -I$$

(θέσαμε $x = \frac{1}{u}$, οπότε $dx = -\frac{1}{u^2} du$).

Άρα $I = -I$, οπότε $I = 0$. Αυτό, όμως, είναι άτοπο, αφού $I = \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx > 0$, επειδή $\frac{1}{1+x^2} > 0$ για κάθε $x \in [-1, 1]$.

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 6 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ– Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $h \circ (g \circ f)$, τότε ορίζεται και η $(h \circ g) \circ f$ και ισχύει $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

β) Για κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι $[f(\alpha), f(\beta)]$ ή $[f(\beta), f(\alpha)]$.

γ) Αν για κάθε συνάρτηση f και για ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \text{ τότε η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } x_0.$$

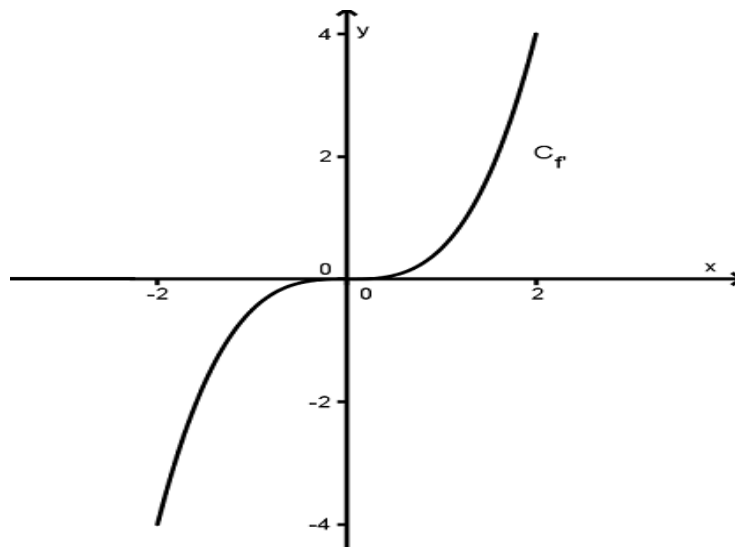
δ) Μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ δεν έχει ασύμπτωτες.

ε) Για όλες τις συνεχείς στο \mathbb{R} συναρτήσεις με $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx$ ($\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$), ισχύει $\beta = \gamma$.

(Μονάδες 5x2= 10)

A4. Στο επόμενο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας συνάρτησης f στο διάστημα $[-2, 2]$. Επιλέξτε τη σωστή απάντηση **(Μονάδες 2)** και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας **(Μονάδα 1)**

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ– Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

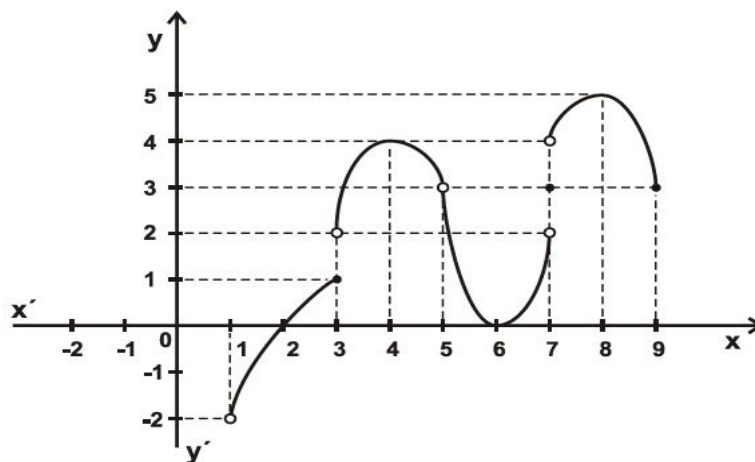


Το σημείο $A(0, f(0))$ είναι:

1. θέση τοπικού μέγιστου της f ,
2. θέση τοπικού ελάχιστου της f ,
3. σημείο καμπής της C_f .

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f .



ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ– Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

B1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f .

(Μονάδες 2)

B2. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ β) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ γ) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$
δ) $\lim_{x \rightarrow 7} f(x)$ ε) $\lim_{x \rightarrow 9} f(x)$

Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

B3. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{f(x)}$ β) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{1}{f(x)}$ γ) $\lim_{x \rightarrow 8} f(f(x))$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

B4. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 3)

B5. Να βρείτε τα σημεία x_0 του πεδίου ορισμού της f για τα οποία ισχύει $f'(x_0) = 0$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = e^x + x^2 + x, x \in \mathbb{R}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένας αριθμός $\alpha \in (-1, 0)$ τέτοιος, ώστε να

ισχύει: $e^\alpha + 2\alpha + 1 = 0$.

(Μονάδες 5)

Γ2. Να δείξετε ότι: $f(x) \geq \alpha^2 - \alpha - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου α ο αριθμός του

ερωτήματος Γ1.

(Μονάδες 5)

ΑΡΧΗ 5ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ– Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

Γ3. Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $f(x) = \frac{2017}{2016}$.

(Μονάδες 5)

Γ4. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x^2+1) + f(x^2+2) < f(x^2) + f(x^2+3), \text{ για κάθε } x > 0$$

(Μονάδες 5)

Γ5. Έστω ένα σημείο $M(x(t), y(t))$, όπου t ο χρόνος, το οποίο διατρέχει τη γραφική παράσταση της f με $x'(t) \neq 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει χρονική στιγμή t_0 , με $x(t_0) \in (-1, 0)$, ώστε ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του M , ως προς τον χρόνο, να μηδενίζεται.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$f'(x) = x \eta \mu x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ και } f(0) = 0$$

Δ1. i. Να δείξετε ότι:

$$f(x) = \eta \mu x - x \sigma \upsilon \nu x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

(Μονάδες 3)

ii. Να δείξετε ότι:

$$\eta \mu x > x \sigma \upsilon \nu x, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

(Μονάδες 2)

Δ2. Έστω επίσης η συνάρτηση:

$$g(x) = |x \epsilon \phi x - x^2|, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Να μελετήσετε τη g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(Μονάδες 4)

ΤΕΛΟΣ 5ΗΣ ΑΠΟ 6 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 6ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ– Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

Δ3. i. Αν $\alpha > 0$, να δείξετε ότι το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης $g(x) = \alpha$ είναι μηδέν.

(Μονάδες 4)

ii. Έστω x_1, x_2, x_3 οι θετικές ρίζες των εξισώσεων $g(x) = 1, g(x) = 2, g(x) = 3$

αντίστοιχα. Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ με $\xi_1 < \xi_2$ τέτοια, ώστε:

$$(x_2 - x_1)g'(\xi_1) + (x_3 - x_2)g'(\xi_2) = 2$$

(Μονάδες 4)

Δ4. i. Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln[\eta\mu x - f(x)] - \ln x + x^2}{\eta\mu^2 x - x \sigma\upsilon\nu x + x}$$

(Μονάδες 3)

ii. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές

παραστάσεις των συναρτήσεων f και $-f'$ και την ευθεία $x = \frac{\pi}{2}$.

(Μονάδες 5)

Ο Δ Η Γ Ι Ε Σ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμο σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμία άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 1 ώρα μετά από την διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

Επιστημονική επιμέλεια:

Καραγιάννης Ιωάννης,

Σύμβουλος Εκπαίδευσης Μαθηματικών

