ΛΥΣΕΙΣ (ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ)

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ ΣΕΛ. 144

Α2. ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ ΣΕΛ. 123

Α3. 1. Σ 2. Σ 3. Λ 4. Λ 5. Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1)

$D_f = (0, +\infty)$ στο οποίο η f συνεχής και παραγωγίσιμη ως διαφορά συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων αντίστοιχα με $f'(x) = \frac{1-x}{x}$

Επειδή x>0 έχω $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1-x}{x} = 0 \Leftrightarrow 1 - x > 0 \Leftrightarrow -x > -1 \Leftrightarrow x < 1$

Άρα 0<χ<1

Η f συνεχής στο $(0,1]$ και $f'(x) > 0$ στο (0,1) άρα η f γν.αυξουσα στο (0,1]

Η f συνεχής στο $(1, +\infty)$ και $f'(x) < 0$ στο (1,+∞) άρα η f γν.φθίνουσα στο (1,+∞)

Για x=1 έχουμε μέγιστο το $f(1) = ln\,1 - 1 = -1$

Β2)

Η f γν.αυξουσα στο Α1=(0,1] άρα $f(A_1) = \left(\lim\limits_{x \to 0+} f(x), f(1)\right]$

$\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0+} (\ln x - x) = -\infty$ και f(1)=-1 άρα $f(A_1) = (-\infty, -1]$

Η f γν.φθίνουσα στο Α2=$(1, +\infty)$ άρα $f(A_2) = \left(\lim\limits_{x \to +\infty} f(x), f(1)\right)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln x - x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x \cdot (\frac{\ln x}{x} - 1)\right) = +\infty \cdot (-1) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

Άρα $f(A_2) = (-\infty, -1)$ άρα $f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = (-\infty, -1]$

Β3)

Παρατηρώ $-3 \epsilon f(A_1)$ άρα η f(x)=-3 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο A_1=(0,1] και επειδή η f γν. αύξουσα στο A_1 , η ρίζα είναι μια και μοναδική

Ομοίως $-3 \epsilon f(A_2)$ άρα η f(x)=-3 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο A_2=(1,+∞) και επειδή η f γν. φθίνουσα στο A_2, η ρίζα είναι μια και μοναδική

Άρα η f έχει ακριβώς δυο ρίζες στο (0,+∞)

B4)

Θεωρώ την συνάρτηση $f(t) = ln\, t - t$ με $t \in [x+1, x+2]$ η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[x+1, x+2]$ και παραγωγισιμη στο διάστημα (χ+1, χ+2) άρα ισχύει το ΘΜΤ , οπότε υπάρχει ξ$\epsilon(x+1, x+2)$ ώστε

$f'(\xi) = \frac{f(x+2)-f(x+1)}{(x+2)-(x+1)} = \frac{\ln(x+2)-(x+2)-(\ln(x+2)-(x+1))}{x+2-x-1}$=$ln(x+2) - ln(x+1) - 1$

Είναι $f'(t) = \frac{1}{t} - 1$ οπότε έχω ότι υπάρχει $\xi\epsilon(\chi+1, \chi+2)$ ώστε $\frac{1}{\xi} - 1 = ln(x+2) - ln(x+1) - 1$ (1)

$$\xi \,\epsilon\, (\chi+1\,, \chi+2) \Leftrightarrow x+1 < \xi < x+2 \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} > \frac{1}{\xi} > \frac{1}{x+2}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{1}{x+1} - 1 > \frac{1}{\xi} - 1 > \frac{1}{x+2} - 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{x+2} - 1 < \frac{1}{\xi} - 1 < \frac{1}{x+1} - 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{x+2} - 1 < f(x+2) - f(x+1) < \frac{1}{x+1} - 1$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, οπότε για να δείξουμε ότι είναι σταθερή , αρκεί να δείξουμε ότι :

$h'(x)=0 \Leftrightarrow (f(x)-\frac{1}{x})'=0 \Leftrightarrow f'(x)+\frac{1}{x^2}=0$ για κάθε $x>0$

ισχύει :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-f(x)}{h} = 2\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-f(x)}{2h}$$
$$= 2\lim_{u\to 0}\frac{f(x+u)-f(x)}{u} = 2f'(x)$$

$u=2h$

$u_0=\lim_{h\to 0} 2h = 0$

άρα , για κάθε $x>0$, έχουμε :

$x^2\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-f(x)}{h}=-2 \Leftrightarrow x^2 2f'(x)=-2 \Leftrightarrow f'(x)=-\frac{1}{x^2} \Leftrightarrow f'(x)+\frac{1}{x^2}=0$

Γ2. $h(x)=c \Leftrightarrow f(x)-\frac{1}{x}=c$, για κάθε $x>0$

για κάθε $x>0$, έχουμε

$\ln x \cdot f(x)-1\leq 2x^2-3x \Leftrightarrow \ln x \cdot f(x)-1-2x^2+3x\leq 0$

θεωρούμε την συνάρτηση $g(x)= \ln x \cdot f(x)-1-2x^2+3x$, $x>0$

Η g παραγωγίσιμη με :

$g'(x)=\frac{f(x)}{x}+\ln x . f'(x)-4x+3$, $x>0$

παρατηρούμε ότι $g(1)=\ldots=0$, οπότε έχουμε $g(x)\leq g(1)$, $x>0$

δηλαδή η g παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0=1$

•η g παρουσιάζει τοπ. ακρότατο στο $x=1$

• η g είναι παραγωγίσιμη στο $x=1$

•το χ=1 είναι εσωτερικό σημείο του Dg=$(0,+\infty)$

Από το θεωρήμα Fermat προκύπτει ότι :

$g'(1)=0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow f(1)=1$

$f(x)-\frac{1}{x}=c \Leftrightarrow 1-1=c \Leftrightarrow 0=c$

$f(x)-\frac{1}{x}=0 \Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{x}$, $x>0$

Γ3. Έχουμε $M(x,y)\epsilon C_f \Leftrightarrow y=f(x) \Leftrightarrow y=\frac{1}{x}$, $x>0$

Είναι $A(x,0)$, $B(0,y)$ δλδ $B(0,\frac{1}{x})$

Η περίμετρος του ορθογωνίου ΟΑΜΒ είναι

$\Pi=2(OA)+2(OB)=2x+2y=2x+2\frac{1}{x}=2(x+\frac{1}{x})$, $x>0$

Οπότε έχουμε $\Pi(x)= 2(x+\frac{1}{x})$, $x>0$

$\Pi'(x)=\ldots=2\frac{x^2-1}{x^2}$, $x>0$

$\Pi'(x)>0$, $x\epsilon(1,+\infty)$ και Π(χ) συνεχής στο $[1,+\infty)$ άρα Π(χ) γν αύξουσα στο $[1,+\infty)$

$\Pi'(x)<0$, $x\epsilon(0,1)$ και Π(χ) συνεχής στο $(0,1]$ άρα Π(χ) γν φθίνουσα στο $(0,1]$

Άρα η περίμετρος ελαχιστοποιείται για χ=1. Άρα Μ(1,1)

Γ4. Είναι : $\Lambda(x(t),y(t))\epsilon C_f \Leftrightarrow y(t)=\frac{1}{x(t)}$, $x(t)>0$

Επίσης $K(x(t),0)$, $H(0,y(t))$. Τη χρονική στιγμή t_0 που το τετράπλευρο ΟΚΛΗ είναι τετράγωνο έχουμε :

$(OK)=(OH) \Leftrightarrow x(t_0)=y(t_0) \Leftrightarrow x(t_0)=\frac{1}{x(t_0)} \Leftrightarrow x^2(t_0)=1 \Leftrightarrow x(t_0)=1$, $x(t)>0$

Η απόσταση του Λ από την αρχή των αξόνων είναι

(ΟΛ)=$\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}$=$\sqrt{x^2(t)+\frac{1}{x^2(t)}}$=d(t)

d′(t)=$\frac{\left(\sqrt{x^2(t)+\frac{1}{x^2(t)}}\right)'}{2\left(\sqrt{x^2(t)+\frac{1}{x^2(t)}}\right)}$=$\frac{2x(t)x'(t)-\frac{2x(t)x'(t)}{x^4(t)}}{2\left(\sqrt{x^2(t)+\frac{1}{x^2(t)}}\right)}$

t=t_0 , x(t_0)=1 d′(t_0)=…=$\frac{2x'(t_0)-2x'(t_0)}{2\sqrt{2}}$= 0 μον.μηκ/μον.χρ.

ΘΕΜΑ Δ

Δ.1 $\int_0^2 \mathrm{x}\mathrm{f}''(\mathrm{x})\mathrm{dx}=0 \Leftrightarrow [\mathrm{x}\mathrm{f}'(\mathrm{x})]_0^2-\int_0^2 \mathrm{f}'(\mathrm{x})\mathrm{dx}=0 \Leftrightarrow 2\mathrm{f}'(2)-[\mathrm{f}(\mathrm{x})]_0^2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\mathrm{f}'(2)-(\mathrm{f}(2)-\mathrm{f}(0))=0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \mathrm{f}'(2)=3$.

Εξίσωση εφαπτομένης : $y-5=3(x-2) \Leftrightarrow y=3x-1$.

Δ.2 Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στο $[0,2]$, οπότε υπάρχει $x_0 \in (0,2)$, *ώστε*

$f'(x_0)=3$.

Εφαρμόζουμε Θ/Rolle για την f ′ στο $[x_0,2]$, *οπότε υπάρχει*

$\xi \in (x_0,2) \subseteq (0,2)$, *ώστε* $f''(\xi)=0$.

Δ.3 Η f ′ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) \neq 0$, άρα η f ′ διατηρεί σταθερό

πρόσημο στο $\mathbb{R}$ και επειδή είναι $f'(2)=3>0$, *θα ισχύει ότι* $f'(x)>0$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα , άρα

και 1-1 .

Δ.4 Έχουμε $I=\int_{-1}^{5}\frac{1}{3}f\left(\frac{x+1}{3}\right)dx+\int_{-1}^{5}f^{-1}(x)dx$.

- $\int_{-1}^{5}\frac{1}{3}f\left(\frac{x+1}{3}\right)dx=\int_{0}^{2}f(u)du$. $\quad(\theta\acute{\varepsilon}\tau o\upsilon\mu\varepsilon\ \ u=\frac{x+1}{3})$
- $\int_{-1}^{5}f^{-1}(x)dx=\int_{0}^{2}uf\,'(u)du$. (θέτουμε $x=f(u)$)

Επομένως είναι : $I=\int_{0}^{2}\big(f(u)+uf\,'(u)\big)du=[uf(u)]_{0}^{2}=10$.

ΟΙΚΟΝΟΜΟΥ ΕΛΕΝΗ (ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΗ ΥΠΕΥΘΥΝΗ)
ΠΑΝΑΓΟΥ ΓΙΩΡΓΟΣ (ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟΣ ΥΠΕΥΘΥΝΟΣ)
ΣΩΤΗΡΟΠΟΥΛΟΣ ΑΡΗΣ (ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟΣ ΥΠΕΥΘΥΝΟΣ)