

**ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ Γ' ΤΑΞΗΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β)  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ  
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ  
(ΘΕΡΙΝΗ ΠΡΟΕΤΟΙΜΑΣΙΑ)  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα  $(α,β)$  , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο  $χ_0$  , στο οποίο όμως η  $f$  είναι συνεχής .

Αν  $f'(x) > 0$  στο  $(α,χ_0)$  και  $f'(x) < 0$  στο  $(χ_0,β)$  , τότε να αποδείξετε ότι το  $f(χ_0)$  είναι τοπικό μέγιστο της  $f$ .

**(MON. 10)**

**A2.** Τι ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του  $y=f(x)$  ως προς  $x$  στο σημείο  $χ_0$  του πεδίου ορισμού της  $f$  ;

**(MON. 5)**

**A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό αν η πρόταση είναι σωστή ή Λάθος αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Αν για την  $f$  ισχύει το Θεώρημα Rolle στο διάστημα  $[α,β]$  , τότε η γραφική της παράσταση έχει σε ένα τουλάχιστον σημείο οριζόντια εφαπτομένη.
2. Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $Δ$  και ισχύει  $f'(x) > 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $χ$  του  $Δ$ , τότε η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $Δ$ .
3. Για κάθε συνάρτηση  $f:R \rightarrow R$  η οποία είναι παραγωγίσιμη και δεν παρουσιάζει ακρότατα ισχύει  $f'(x) \neq 0$  για κάθε  $χ \in R$ .
4. Αν μια συνάρτηση  $f:R \rightarrow R$  δεν έχει κρίσιμα σημεία τότε απαραίτητα δεν έχει ακρότατα.

5. Ισχύει ότι  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx = 0$

**(MON. 10)**

### **ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln x - x$ ,  $x > 0$

**B1.** Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα **(MON.6)**

**B2.** Να βρεθεί το σύνολο τιμών της. **(MON.7)**

**B3.** Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης  $f(x) = -3$  **(MON.5)**

**B4.** Να αποδειχθεί η ανισότητα  $\frac{1}{x+2} - 1 < f(x+2) - f(x+1) < \frac{1}{x+1} - 1$ ,  $x > 0$  **(MON.7)**

### **ΘΕΜΑ Γ**

Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f(0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύουν:

$$x^2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h) - f(x)}{h} = -2, \quad x > 0$$

$$\ln x \cdot f(x) - 1 \leq 2x^2 - 3x, \quad x > 0$$

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $h(x) = f(x) - \frac{1}{x}$ ,  $x > 0$  είναι σταθερή.

**(MON.4)**

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $x > 0$

**(MON. 6)**

**Γ3.** Από τυχαίο σημείο  $M(x, y)$  της γραφικής παράστασης της  $f$  σχεδιάζουμε κατακόρυφη ευθεία που τέμνει τον άξονα  $x'x$  στο σημείο  $A$  και μια οριζόντια ευθεία που τέμνει τον άξονα  $y'y$  στο σημείο  $B$ . Να βρείτε ποιες πρέπει να είναι

οι συντεταγμένες του σημείου  $M$  έτσι, ώστε η περίμετρος του ορθογωνίου  $OAMB$  να γίνει ελάχιστο. **(MON. 7)**

**Γ4.** Έστω  $\Lambda(x(t), y(t))$ ,  $t \geq 0$  ένα σημείο που κινείται πάνω στην γραφική παράσταση της  $f$  και  $K, H$  οι προβολές του σημείου  $A$  στους άξονες  $x'x$ ,  $y'y$  αντίστοιχα.

Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης του  $\Lambda$  από την αρχή των αξόνων τη χρονική στιγμή που το τετράπλευρο  $OK\Lambda H$  είναι τετράγωνο.

**(MON.8)**

### **ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει  $f'(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , η  $C_f$  διέρχεται από τα σημεία  $A(0, -1)$  και  $B(2, 5)$  και ισχύει:  $\int_0^2 x f''(x) dx = 0$ .

**Δ.1** Να βρείτε την εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο της  $B$ . **(MON. 6)**

**Δ.2** Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον  $\xi \in (0, 2)$ , ώστε  $f''(\xi) = 0$ .

**(MON. 6)**

**Δ.3** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι  $1-1$ .

**(MON. 5)**

**Δ.4** Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_{-1}^5 \left( \frac{1}{3} f\left(\frac{x+1}{3}\right) + f^{-1}(x) \right) dx.$$

**(MON. 8)**

### **ΟΔΗΓΙΕΣ (για σας εξεταζόμενους)**

- 1.** Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
- 2.** Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμία άλλη σημείωση.**  
Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
- 3.** Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
- 4.** Να γράψετε σας απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
- 5.** Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
- 6.** Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
- 7.** Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
- 8.** Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΟΙΚΟΝΟΜΟΥ ΕΛΕΝΗ (ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΗ ΥΠΕΥΘΥΝΗ)  
ΠΑΝΑΓΟΥ ΓΙΩΡΓΟΣ (ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟΣ ΥΠΕΥΘΥΝΟΣ)  
ΣΩΤΗΡΟΠΟΥΛΟΣ ΑΡΗΣ (ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟΣ ΥΠΕΥΘΥΝΟΣ)**