ΛΥΣΕΙΣ ΤΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ, ΜΑΡΤΙΟΣ 2025

ΘΕΜΑ Α

Α1. α. Διατύπωση του Θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών:

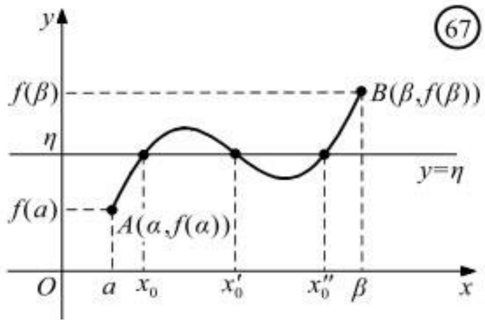
Έστω μια συνάρτηση f , ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β].

Αν η f είναι συνεχής στο [α, β] και $f(α) \neq f(β)$ τότε, για κάθε αριθμό $η$ μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (α, β)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = η$.

Απόδειξη του Θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών:

Ας υποθέσουμε ότι $f(α) < f(β)$. Τότε θα ισχύει $f(α) < η < f(β)$ (επόμενο σχήμα).

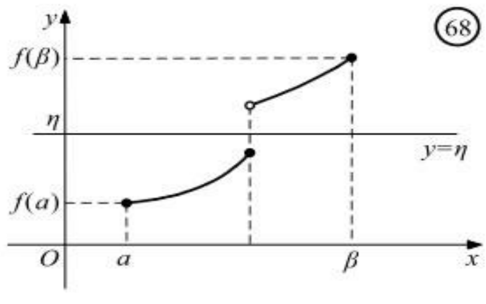
Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - η$, $x \in [α, β]$, παρατηρούμε ότι :



● η g είναι συνεχής στο [α, β] και

● $g(α)\, g(β) < 0$, αφού $g(α) = f(α) - η < 0$ και $g(β) = f(β) - η > 0$ Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0 \in (α, β)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0) = f(x_0) - η = 0$, οπότε $f(x_0) = η$.

β. Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο διάστημα [α, β], τότε, όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα, δεν παίρνει υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές.



Α2. Το λάθος βρίσκεται στην αντικατάσταση $x = \frac{1}{u}$.

Η αντικατάσταση $x = \frac{1}{u}$ δεν είναι σωστή διότι όταν $x = 0$ δεν υπάρχει αντίστοιχο u .

Α3.

α. Σωστό.

β. Λάθος.

γ. Λάθος.

δ. Σωστό.

ε. Λάθος.

Α4. Το 2 **(**Το σημείο $A(0, f(0))$ είναι θέση τοπικού ελάχιστου της f) διότι $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (-2, 0)$ και συνεχής στο $[-2, 0]$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-2, 0]$. Ακόμα $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, 2)$ και συνεχής στο $[0, 2]$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο$[0, 2]$. Επομένως στο $x_0 = 0$ έχει τοπικό ελάχιστο, δηλαδή το σημείο $A(0, f(0))$ είναι θέση τοπικού ελάχιστου της f.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f είναι:

$$A = (1,5) \cup 5, 9.$$

Το σύνολο τιμών$f(A)$ είναι $f(A) = -2, 5$

Β2. Έχουμε:

α) $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = -2$

β) $\lim_{x\to 3^-} f(x) = 1 \neq \lim_{x\to 3^+} f(x) = 2$ (Δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 3} f(x)$)

γ) $\lim_{x\to 5^+} f(x) = \lim_{x\to 5^-} f(x) = 3 = \lim_{x\to 5} f(x)$

δ) $\lim_{x\to 7^+} f(x) = 4 \neq \lim_{x\to 7^-} f(x) = 2$ (Δεν υπάρχει το$\lim_{x\to 7} f(x)$)

ε) $\lim_{x\to 9} f(x) = \lim_{x\to 9^+} f(x) = 3$

Β3.

α) Είναι:

$\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{f(x)} = -\infty$, διότι $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (1,2)$

$\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{f(x)} = +\infty$,διότι $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (2,3)$

Δεν υπάρχει το όριο $\lim_{x\to 2} \frac{1}{f(x)}$.

β) Είναι:

$\lim_{x\to 6} \frac{1}{f(x)} = +\infty$, διότι $\lim_{x\to 6} f(x) = 0$ και$f(x) > 0$για κάθε $x \in (5,7)$

γ) θέτουμε $f(x) = u$ και έχουμε:

$$\lim_{x\to 8} f(x) = u_0 \Rightarrow \lim_{x\to 8^+} f(x) = \lim_{x\to 8^-} f(x) = 5 = u_0 .$$

Επομένως έχουμε:

$$\lim_{x\to 8} f(f(x)) = \lim_{u\to u_0} f(u) = \lim_{u\to 5} f(u) = 3$$

Β4. Η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στα σημεία $x_1 = 3$ και $x_2 = 7$ αφού:

$\lim_{x\to 3^-} f(x) = 1 \neq \lim_{x\to 3^+} f(x) = 2$ (Δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 3} f(x)$) και

$\lim_{x\to 7^+} f(x) = 4 \neq \lim_{x\to 7^-} f(x) = 2$ (Δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 7} f(x)$)

Β5. Τα σημεία στα οποία έχουμε $f'(x) = 0$ είναι $x_3 = 4, x_4 = 6$, $x_5 = 8$, αφού από την παρατήρηση του δοσμένου σχήματος σε αυτά δέχεται οριζόντια εφαπτομένη (παράλληλη με τον άξονα $x'x$) οπότε (και επειδή στα σημεία αυτά είναι συνεχής) θα έχουμε$f'(x_3) = f'(x_4) = f'(x_5) = 0$.

<u>ή εναλλακτικά</u>: Η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα σημεία x_3, x_4, x_5 στα οποία είναι παραγωγίσιμη και επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat, θα είναι $f'(x_3) = f'(x_4) = f'(x_5) = 0$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = e^x + 2x + 1, x \in \mathbb{R}$$

Εφαρμόζουμε το Θ. Bolzano για την g στο $[-1, 0]$

- Η g είναι συνεχής στο $[-1, 0]$ (ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων στο $[-1, 0]$).
- $g(0) = 2 > 0$
- $g(-1) = \frac{1}{e} - 1 < 0$

Άρα υπάρχει $a \in (-1, 0)$ τέτοιο, ώστε:

$$g(a) = 0 \Leftrightarrow e^a + 2a + 1 = 0 \text{ .}$$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$), με $g'(x) = e^x + 2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και επειδή η g είναι γνησίως αύξουσα στο$x \in \mathbb{R}$, άρα και «1-1» , δηλαδή η η g έχει μοναδική ρίζα την $x = a$.

Γ2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με:

$$f'(x) = e^x + 2x + 1, x \in \mathbb{R}.$$

Άρα $f'(x) = g(x), x \in \mathbb{R}$ και η g έχει μοναδική ρίζα την $x = a$. Έχουμε:

$$x < a \Rightarrow g(x) < g(a) \Rightarrow f'(x) < 0$$

$$x > a \Rightarrow g(x) > g(a) \Rightarrow f'(x) > 0$$

Δηλαδή $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, \alpha)$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $(-\infty, \alpha]$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, \alpha]$. Ακόμα $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (a, +\infty)$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[\alpha, +\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα στο$[\alpha, +\infty)$.

Επομένως η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x = \alpha$, το $f(a) = e^a + \alpha^2 + \alpha$ (1) .

Όμως έχουμε:

$$g(a) = 0 \Leftrightarrow e^a + 2a + 1 = 0 \Leftrightarrow e^a = -2a - 1 \quad (2)$$

Άρα η (1) δίνει:

$$f(a) = e^a + \alpha^2 + \alpha = -2a - 1 + \alpha^2 + \alpha = \alpha^2 - \alpha - 1$$

Άρα έχουμε:

$$f(x) \geq f(a) \Rightarrow f(x) \geq \alpha^2 - \alpha - 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ .}$$

Γ3. Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}(e^x + x^2 + x) = +\infty \text{ και } \lim_{x\to-\infty}(e^x + x^2 + x) = \lim_{x\to-\infty}\left[x^2\left(\frac{e^x}{x^2} + 1 + \frac{1}{x}\right)\right] = +\infty.$$

Αν $\Delta_1 = -\infty, \alpha, \Delta_2 = \alpha, +\infty)$ θα έχουμε:

$$f(\Delta_1) = \alpha^2 - \alpha - 1, +\infty)$$

$$f(\Delta_2) = \alpha^2 - \alpha - 1, +\infty)$$ (επειδή η f γν. φθίνουσα στο Δ_1 και γν. αύξουσα στο Δ_2)

Είναι:

$$\alpha \in (-1, 0) \Rightarrow -1 < \alpha < 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 < \alpha^2 < 1 \\ 0 < -\alpha < 1 \end{cases} \Rightarrow -1 < \alpha^2 - \alpha - 1 < 1 \text{ και } \frac{2017}{2016} > 1 \text{ .}$$

Επομένως:

- $\frac{2017}{2016} \in f(\Delta_1)$, άρα υπάρχει $\rho_1 \in (-\infty, \alpha)$ τέτοιος, ώστε $f(\rho_1) = \frac{2017}{2016}$ και είναι μοναδικός αφού η f, ως γνησίως φθίνουσα στο Δ_1 ,είναι και «1-1».
- $\frac{2017}{2016} \in f(\Delta_2)$, άρα υπάρχει $\rho_2 \in (a, +\infty)$ τέτοιος, ώστε $f(\rho_2) = \frac{2017}{2016}$ και είναι μοναδικός αφού η f, ως γνησίως αύξουσα στο Δ_2, είναι και «1-1».

Επομένως η f έχει δύο ακριβώς ρίζες, τις ρ_1, ρ_2.

Γ4. Η σχέση που θέλουμε να αποδείξουμε γράφεται διαδοχικά:

$$f(x^2+1)+f(x^2+2)<f(x^2)+f(x^2+3) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f(x^2+1)-f(x^2)<f(x^2+3)-f(x^2+2) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{f(x^2+1)-f(x^2)}{(x^2+1)-x^2}<\frac{f(x^2+3)-f(x^2+2)}{(x^2+3)-(x^2+2)} \quad (1)$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού για την συνάρτηση f στα διαστήματα:

$$[x^2, x^2+1] \text{ και } [x^2+2, x^2+3]\,,\ x \in \mathbb{R} \text{ έχουμε:}$$

- Η f παραγωγίσιμη στα διαστήματα $[x^2, x^2+1]$ και $[x^2+2, x^2+3]$, $x \in \mathbb{R}$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$). Άρα η f είναι και συνεχής στα διαστήματα αυτά. Επομένως υπάρχουν αντίστοιχα :

$$\xi_1 \in (x^2, x^2+1), \xi_2 \in (x^2+2, x^2+3) \text{ με:}$$

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x^2+1)-f(x^2)}{(x^2+1)-x^2} \text{ και } f'(\xi_2) = \frac{f(x^2+3)-f(x^2+2)}{(x^2+3)-(x^2+2)}$$

Έτσι η προς απόδειξη σχέση (1) γίνεται $f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$, η οποία είναι αληθής αφού: $\xi_1 < \xi_2 \Rightarrow f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$, επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ διότι:

$$f''(x) = e^x + 2 > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \ (f' \text{συνεχής στο } \mathbb{R}\,).$$

Γ5. Έχουμε ότι:

$$y(t) = e^{x(t)} + x^2(t) + x(t), t \geq 0 \quad (2).$$

Τα μέλη της σχέσης (2) είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις για κάθε $t \geq 0$ (ως πράξεις και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων για κάθε $t \geq 0$). Επομένως έχουμε:

$$y'(t) = e^{x(t)} \cdot x'(t) + 2x(t) \cdot x'(t) + x'(t) \Leftrightarrow y'(t) = x'(t)\left(e^{x(t)} + 2x(t) + 1\right) \ (3)$$

Αν $t = t_0$ είναι η χρονική στιγμή που το σημείο Μ διέρχεται από το$(a, f(a))$, τότε $x(t_0) = \alpha \in (-1, 0)$.

Η σχέση (3) για $t = t_0$ γίνεται:

$$y'(t_0) = x'(t_0)\left(e^{x(t_0)} + 2x(t_0) + 1\right) \ (4) \text{ με } x'(t) \neq 0$$

Ισχύει ακόμα ότι :

$$e^{x(t_0)} + 2x(t_0) + 1 = e^a + 2a + 1 = 0 \ (5).$$

Η σχέση (4), λόγω της σχέσης (5) γίνεται:

$$y'(t_0) = x'(t_0) \cdot 0 = 0.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. α. Έχουμε διαδοχικά:

$$f(x) = x\eta\mu x \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x - f(x) = \sigma\upsilon\nu x - x\eta\mu x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\eta\mu x - f(x))' = (x\sigma\upsilon\nu x)' \Leftrightarrow f(x) = \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x + c, c \in \mathbb{R}$$

για $x = 0$έχουμε:

$$f(0) = 0 + c \Leftrightarrow 0 = c \Leftrightarrow c = 0$$

άρα:

$$f(x) = \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x$$

β. Η συνάρτηση:

$$f(x) = \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x$$

είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$με:

$$f'(x) = x\eta\mu x > 0, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ και η } f \text{ είναι συνεχής στο } \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και ισχύει:

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow f(0) < f(x) \Leftrightarrow 0 < \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \eta\mu x > x\sigma\upsilon\nu x$$

Δ2. $g(x) = |x\varepsilon\varphi x - x^2| = |x| \cdot |\varepsilon\varphi x - x|$

Από το ερώτημα (Δ1 β) ισχύει:

$$\eta\mu x > x\sigma\upsilon\nu x, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x > x.$$

'Εχουμε:

Αν $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, τότε $-x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και ισχύει:

$$\varepsilon\varphi(-x) > -x \Leftrightarrow -\varepsilon\varphi x > -x \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x < x$$

για $x = 0 \Rightarrow g(0) = 0$

Άρα $g(x) = x\varepsilon\varphi x - x^2, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$) με:

$g'(x) = (x\varepsilon\varphi x - x^2)' = \varepsilon\varphi x - 2x + \frac{x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \quad = (\varepsilon\varphi x - x) + \frac{x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - x = (\varepsilon\varphi x - x) + x\left(\frac{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\right) = = (\varepsilon\varphi x - x) + x \cdot \varepsilon\varphi^2 x$

- Αν $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, τότε $\varepsilon\varphi x - x > 0$ και $x\varepsilon\varphi^2 x > 0$ άρα $g'(x) > 0$
- Αν $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, τότε $\varepsilon\varphi x - x < 0$ και $x\varepsilon\varphi^2 x < 0$ άρα $g'(x) < 0$
- Αν $x = 0 \Rightarrow g'(0) = 0$

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$και γνησίως

αύξουσα στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Η g παρουσιάζει για $x = 0$ ολικό ελάχιστο , το $g(0) = 0$.

<u>2ος τρόπος:</u>

$$g'(x) = = (x\varepsilon\varphi x - x^2)' = \varepsilon\varphi x - 2x + \frac{x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = = \frac{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x + x - 2x\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} =$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu x \cdot (\eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x) + x\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

$g'(0) = 0$

- Αν $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, τότε $\sigma\upsilon\nu x > 0, \eta\mu x > x\sigma\upsilon\nu x, x\eta\mu^2 x > 0$, τότε $g'(x) > 0$

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

- Έστω $x_1, x_2 \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ με $x_1 < x_2$, τότε:

$$-x_1 > -x_2 \Rightarrow g(-x_1) > g(-x_2) \Rightarrow g(x_1) > g(x_2)$$

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$

Η g παρουσιάζει για $x = 0$ ολικό ελάχιστο, το $g(0) = 0$

Δ3. α) $g(x) = a$, όπου $a > 0$

- g([0,π/2])=[0,+00) , άρα υπάρχει μοναδικό $x_o \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

(γιατί η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$) τέτοιο, ώστε $g(x_o) = a$

- $-x_o \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ και

$g(-x_o) = (-x_o)\varepsilon\varphi(-x_o) - (-x_o)^2 = g(x_o) = a$

Το -xo είναι μοναδικό

(διότι η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$)

Άρα το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης $g(x) = a$, όταν $a > 0$ είναι $-x_o + x_o = 0$.

β). Επειδή x2, x3 είναι οι θετικές ρίζες των εξισώσεων:

$$g(x) = 1, g(x) = 2, g(x) = 3$$

αντίστοιχα , έχουμε:

$$g(x_1) = 1, g(x_2) = 2, g(x_3) = 3$$

και είναι:

$$1 < 2 < 3 \Leftrightarrow g(x_1) < g(x_2) < g(x_3) \Leftrightarrow x_1 < x_2 < x_3$$

από την εφαρμογή του Θ.Μ.Τ του Διαφορικού Λογισμού για την g στα $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$ (αφού πληρούνται οι προϋποθέσεις διότι g παραγωγίσιμη στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, επομένως και στα, $[x_2, x_3]$, άρα και συνεχής σε αυτά) έχουμε:

$$(x_2 - x_1) \cdot g'(\xi_1) = g(x_2) - g(x_1) = 2 - 1 = 1 \quad , \xi_1 \in (x_1, x_2)$$

$$(x_3 - x_2) \cdot g'(\xi_2) = g(x_3) - g(x_2) = 3 - 2 = 1 \quad , \xi_2 \in (x_2, x_3)$$

Προσθέτοντας τις προηγούμενες σχέσεις κατά μέλη προκύπτει:

$$(x_2 - x_1)\cdot g'(\xi'_1) + (x_3 - x_2)\cdot g'(\xi_2) = 2$$

Δ4. α. Έχουμε διαδοχικά:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln[\eta\mu x - f(x)] - \ln x + x^2}{\eta\mu^2 x - x\sigma\upsilon\nu x + x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{ln(\sigma\upsilon\nu x)+x^2}{\eta\mu^2 x - x\sigma\upsilon\nu x + x} \overset{D.L.P}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{-\varepsilon\varphi x + 2x}{2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu x + x\eta\mu x + 1} \overset{D.L.P}{=} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}+2}{2\sigma\upsilon\nu^2 x - 2\eta\mu^2 x + 2\eta\mu x + x\sigma\upsilon\nu x} =$$

$$= \frac{-\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 0}+2}{2\sigma\upsilon\nu^2 0 - 2\eta\mu^2 0 + 2\eta\mu 0 + 0\sigma\upsilon\nu 0} = \frac{1}{2}$$

__2^{ος} τρόπος:__

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln[\eta\mu x - f(x)] - \ln x + x^2}{\eta\mu^2 x - x\sigma\upsilon\nu x + x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{ln(\sigma\upsilon\nu x)+x^2}{\eta\mu^2 x - x\sigma\upsilon\nu x + x} = = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{ln(\sigma\upsilon\nu x)}{x^2}+1}{\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2 - \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x}} = l$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{-\varepsilon\varphi x}{2x} \overset{D.L.H}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\sigma\upsilon\nu x)}{x^2} \overset{D.L.H}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{-1}{2\sigma\upsilon\nu^2 x} = -\frac{1}{2}$$

- $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2 = 1^2 = 1$
- $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} \overset{D.L.H}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{-\eta\mu x}{1} = 0$

Άρα:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{ln[\eta\mu x - f(x)] - ln\, x + x^2}{\eta\mu^2 x - x\sigma\upsilon\nu x + x} = \frac{-\frac{1}{2}+1}{1-0} = \frac{1}{2}$$

β.

Για $0 < x \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x > 0$ (I) (από το ερώτημα Δ1 β) και $x\eta\mu x > 0$ (II) για κάθε $x \in 0, \frac{\pi}{2}$. Άρα με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε:

$$\eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x + x\eta\mu x > 0 \text{ (III), ΄για κάθε } x \in 0, \frac{\pi}{2}$$

Άρα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f, -f'$ τέμνονται μόνο στο σημείο$O\ (0,0)$ (αφού $f(0) = f'(0) = 0$).

Το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και $-f'$ και την ευθεία $x = \frac{\pi}{2}$

είναι (λόγω της σχέσης (III) έχουμε:

$|\eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x + x\eta\mu x| = \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x + x\eta\mu x$ για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$):

$$E(\Omega) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |f(x) - f'(x)|dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x + x\eta\mu x|\, dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x + x\eta\mu x)dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sigma\upsilon\nu x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\eta\mu x dx = I_1 - I_2 + I_3 \ (1)$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu x dx = [-\sigma\upsilon\nu x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sigma\upsilon\nu x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\eta\mu x)' dx =$$

$$= [x\eta\mu x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu x dx = \frac{\pi}{2} + [\sigma\upsilon\nu x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$$

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\eta\mu x dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,(\sigma\upsilon\nu x)' dx = -[x\sigma\upsilon\nu x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu x dx = [\eta\mu x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

Άρα: $E(\Omega)=1-\left(\frac{\pi}{2}-1\right)+1=3-\frac{\pi}{2}\ \tau.\mu.$

<u>Εναλλακτικά για το μοναδικό σημείο τομής των</u> $f, -f'$ **<u>έχουμε:</u>**

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f, -f'$ τέμνονται μόνο στο σημείο Ο $(0,0)$ αφού:

$$f(x) = -f'(x) \Leftrightarrow \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x = -x\eta\mu x \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x + x\eta\mu x = 0$ (1)

Προφανώς για $x = 0$ η (1) επαληθεύεται, δηλαδή οι $f, -f'$ τέμνονται στο Ο (0,0).

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$K(x) = \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x + x\eta\mu x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

η οποία είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$) με $K'(x) = x\eta\mu x + \eta\mu x + x\sigma\upsilon\nu x > 0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και επειδή η K είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ θα είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, άρα και «1-1» και επομένως η $x=0$ είναι η μοναδική ρίζα της (1). Άρα οι $f, -f'$ τέμνονται μόνο στο σημείο Ο (0,0) .

Επιστημονική επιμέλεια:

Καραγιάννης Ιωάννης, Σύμβουλος Εκπαίδευσης Μαθηματικών

Ρουμελιώτης Αντώνης, Μαθηματικός