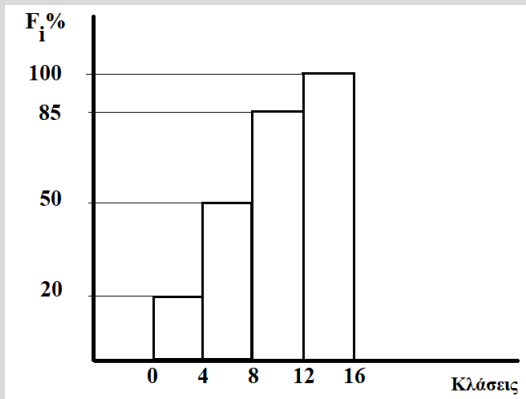
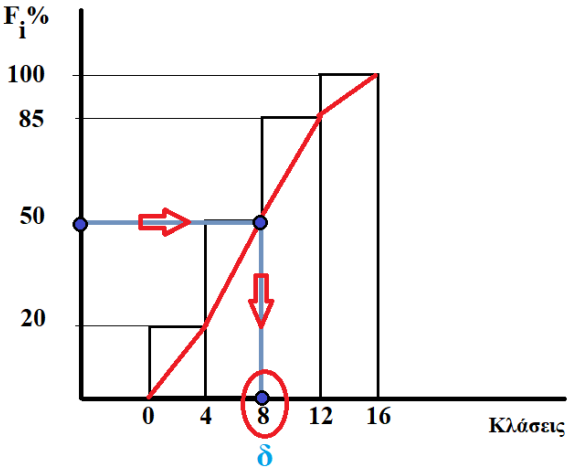


ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ & ΜΟΡΙΟΔΟΤΗΣΗ
ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
ΑΛΓΕΒΡΑ Γ ΕΠΑΛ 2025 (ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ)

ΘΕΜΑ Α		
A1	Αν f παραγωγίσιμη συνάρτηση σε ένα σύνολο A , να αποδείξετε ότι $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$, όπου $c \in \mathbb{R}$ και $x \in A$.	10
	Έστω η συνάρτηση $F(x) = cf(x)$. Έχουμε	1
	$F(x+h) - F(x) = cf(x+h) - cf(x) = c(f(x+h) - f(x))$	1+1+1
	Και για $h \neq 0$ έχουμε $\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{c(f(x+h) - f(x))}{h}$	1+2
	Επομένως $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[c \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] = c \cdot f'(x)$	2+1
A2	Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου δ ενός συνόλου ν παρατηρήσεων, όταν το ν είναι άρτιος αριθμός.	5
	Διάμεσος δ ενός δείγματος ν παρατηρήσεων οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά ορίζεται ως το ημίαθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων αν το ν είναι άρτιος αριθμός <i>(2 μοναδες για να γράψουν ότι έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά)</i>	2+3
A3	Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη σωστό , ανη πρόταση είναι ισωστή , ή λάθος , αν η πρόταση είναι λανθασμένη	6

	α) Αν f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις σε ένα διάστημα Δ, τότε: $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g'(x)$. ΛΑΘΟΣ β) Το διάγραμμα συχνοτήτων χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μίας ποιοτικής μεταβλητής ΛΑΘΟΣ γ) Ισχύει $CV = \frac{s}{\bar{x}} > 0$ ΣΩΣΤΟ	2 2 2
A4.	Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ιδιότητες και να τις συμπληρώσετε:	4
	α) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \neq 0$	2
	β) $(\sqrt{5})' = 0$	2
ΘΕΜΑ Β		
	Οι παρατηρήσεις ενός δείγματος μεγέθους n έχουν ομαδοποιηθεί σε 4 κλάσεις ίσου πλάτους και κατασκευάστηκε όπως φαίνεται παρακάτω το ιστόγραμμα των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων  Με βάση το ιστόγραμμα αυτό:	
B1	Να βρείτε τη σχετική συχνότητα $f_1\%$ (Μον 2). Αν η συχνότητα της 1ης κλάσης είναι $n_1 = 8$, να προσδιορίσετε το μέγεθος n του δείγματος. (Μον 4)	6
	Είναι $f_1\% = F_1\% = 20\%$	2
	$f_1 = \frac{n_1}{n} \Leftrightarrow \frac{20}{100} = \frac{8}{n} \Leftrightarrow \frac{2}{10} = \frac{8}{n} \Leftrightarrow 2n = 80 \Leftrightarrow n = 40$	1+1+1+1
B2	Για $n = 40$: Να αντιγράψετε τον πίνακα που ακολουθεί στο τετράδιό σας και να τον συμπληρώσετε	6
	Έχουμε: $x_1 = 2, x_2 = 6, x_3 = 10$ και $x_4 = 14$. Επίσης είναι $f_1 = \frac{20}{100} = 0,20 \text{ και}$ $f_2\% = F_2\% - F_1\% = 50 - 20 = 30 \Rightarrow f_2 = \frac{30}{100} = 0,30$	

	$f_3\% = F_3\% - F_2\% = 85 - 50 = 35 \Rightarrow f_3 = \frac{35}{100} = 0,35$ $\text{και } f_4\% = F_4\% - F_3\% = 100 - 85 = 15 \Rightarrow f_4 = \frac{15}{100} = 0,15$ Έτσι, $f_2 = \frac{v_2}{v} \Leftrightarrow \frac{30}{100} = \frac{v_2}{40} \Leftrightarrow 100v_2 = 1200 \Leftrightarrow v_2 = 12$ $f_3 = \frac{v_3}{v} \Leftrightarrow \frac{35}{100} = \frac{v_3}{40} \Leftrightarrow 100v_3 = 1400 \Leftrightarrow v_3 = 14$ $\text{και } f_4 = \frac{v_4}{v} \Leftrightarrow \frac{15}{100} = \frac{v_4}{40} \Leftrightarrow 100v_4 = 600 \Leftrightarrow v_4 = 6$ Τέλος, $\sum_{i=1}^4 f_i\% = 100$ Οπότε, ο πίνακας γράφεται: <table><tr><th>Κλάσεις</th><th>κέντρο x_i</th><th>Συχνότητα v_i</th><th>Σχετική Συχνότητα f_i</th></tr><tr><td>[0,4)</td><td>= 2</td><td>8</td><td>= 0,20</td></tr><tr><td>[4,8)</td><td>= 6</td><td>= 12</td><td>= 0,30</td></tr><tr><td>[8,12)</td><td>= 10</td><td>= 14</td><td>= 0,35</td></tr><tr><td>[12,16)</td><td>= 14</td><td>= 6</td><td>= 0,15</td></tr><tr><td>Σύνολο</td><td></td><td>40</td><td>= 1,00</td></tr></table>	Κλάσεις	κέντρο x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική Συχνότητα f_i	[0,4)	= 2	8	= 0,20	[4,8)	= 6	= 12	= 0,30	[8,12)	= 10	= 14	= 0,35	[12,16)	= 14	= 6	= 0,15	Σύνολο		40	= 1,00	0,5x12
Κλάσεις	κέντρο x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική Συχνότητα f_i																							
[0,4)	= 2	8	= 0,20																							
[4,8)	= 6	= 12	= 0,30																							
[8,12)	= 10	= 14	= 0,35																							
[12,16)	= 14	= 6	= 0,15																							
Σύνολο		40	= 1,00																							
B3	Να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ του δείγματος <table><tr><th>Κλάσεις</th><th>κέντρο x_i</th><th>Συχνότητα v_i</th><th>$x_i v_i$</th></tr><tr><td>[0,4)</td><td>= 2</td><td>8</td><td>= 16</td></tr><tr><td>[4,8)</td><td>= 6</td><td>= 12</td><td>= 72</td></tr><tr><td>[8,12)</td><td>= 10</td><td>= 14</td><td>= 140</td></tr><tr><td>[12,16)</td><td>= 14</td><td>= 6</td><td>= 84</td></tr><tr><td>Σύνολο</td><td></td><td>40</td><td>= 312</td></tr></table> $\bar{x} = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^4 x_i v_i = \frac{312}{40} = 7,8$ 3 για τον πίνακα +2 για τον τύπο της μέσης τιμής +2 για τις πράξεις	Κλάσεις	κέντρο x_i	Συχνότητα v_i	$x_i v_i$	[0,4)	= 2	8	= 16	[4,8)	= 6	= 12	= 72	[8,12)	= 10	= 14	= 140	[12,16)	= 14	= 6	= 84	Σύνολο		40	= 312	7
Κλάσεις	κέντρο x_i	Συχνότητα v_i	$x_i v_i$																							
[0,4)	= 2	8	= 16																							
[4,8)	= 6	= 12	= 72																							
[8,12)	= 10	= 14	= 140																							
[12,16)	= 14	= 6	= 84																							
Σύνολο		40	= 312																							
B4	Να κατασκευάσετε το πολύγωνο των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων% (Μον 3) και να εκτιμήσετε τη διάμεσο δ του δείγματος. (Μον 3)	6																								

	Η διάμεσος αντιστοιχεί στο 50% των παρατηρήσεων, άρα από το πολύγωνο συχνοτήτων είναι $\delta = 8$:  (3 για την κατασκευή του πολυγώνου +3 για τη διάμεσο)	3+3
ΘΕΜΑ Γ		
	Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^3}{3} - \alpha x^2 + 3x + 2$, $x \in \mathbb{R}$ και $\alpha \in \mathbb{R}$. Αν η τιμή της 2ης παραγώγου στο $x=2$ είναι ίση με μηδέν τότε:	
Γ1.	Να βρείτε τις συναρτήσεις $f'(x)$ και $f''(x)$ (Μον 3+2) και να υπολογίσετε την τιμή του α (Μον 3)	8
	$f'(x) = \left(\frac{x^3}{3} - \alpha x^2 + 3x + 2 \right)' = x^2 - 2\alpha x + 3, x \in \mathbb{R}$ $f''(x) = 2x - 2\alpha, x \in \mathbb{R}$	3+2
	$f''(2) = 0$ $2 \cdot 2 - 2\alpha = 0$ $4 - 2\alpha = 0$ $2\alpha = 4$ $\alpha = 2$	1 + 1 + 1
Γ2.	Για $\alpha = 2$: Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h^2 + h}$	6
	Είναι $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h^2 + h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h(h+1)} =$	2
	$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h+1}$	2
	$= f'(2) \cdot \frac{1}{0+1} = 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 + 3 = -1$	2

Γ3	Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του ρυθμού μεταβολής της f	6									
	Πρέπει να βρούμε την ελάχιστη τιμή του ρυθμού μεταβολής άρα της $f'(x)$. $f''(x) = 2x - 4$ $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$ <table><tr><td>x</td><td colspan="2">$-\infty$ 2 $+\infty$</td></tr><tr><td>f''</td><td>-</td><td>0 +</td></tr><tr><td>f'</td><td>↘</td><td>↗</td></tr></table> η $f'(x)$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο όταν $x = 2$, $f'(2) = -1$	x	$-\infty$ 2 $+\infty$		f''	-	0 +	f'	↘	↗	1 1 2 1 1
x	$-\infty$ 2 $+\infty$										
f''	-	0 +									
f'	↘	↗									
Γ4	Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f'(2-\sqrt{2})$ και $f'(2-\sqrt{3})$	5									
	Εχουμε: $\sqrt{2} < \sqrt{3}$ $-\sqrt{2} > -\sqrt{3}$ $2-\sqrt{2} > 2-\sqrt{3}$ κι αφού $f'(x) \searrow$ όταν $x \in (-\infty, 2]$ $\Rightarrow f'(2-\sqrt{2}) < f'(2-\sqrt{3})$	1 1 1 1 1									
ΘΕΜΑ Δ											
	Εστω συνάρτηση $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία γνωρίζουμε ότι: - είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ - η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(2, 12)$ και - η εφαπτομένη της C_f στο σημείο A είναι παράλληλη στην ευθεία $(\eta): y = -13x + 2025$. Αν $g(x) = f(x^2 + x + 2) + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε:										
Δ1	Να αποδείξετε ότι	5									
	$g'(x) = f'(x^2 + x + 2) \cdot (2x + 1), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$										
	$g'(x) = [f(x^2 + x + 2) + 1]' = [f(x^2 + x + 2)]' + (1)' =$	1									
	$= f'(x^2 + x + 2)(x^2 + x + 2)' + 0$	2									
	$= f'(x^2 + x + 2)(2x + 1) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$	2									

Δ2	Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο $B(-1, g(-1))$	8
	Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο Α έχει κλίση $f'(2)$ κι αφού είναι παράλληλη στην ευθεία (η) θα είναι $f'(2) = \lambda_\eta = -13$ οπότε $ \begin{aligned} g'(-1) &= f'((-1)^2 + (-1) + 2) \cdot (2(-1) + 1) \\ &= f'(1 - 1 + 2)(-2 + 1) \\ &= f'(2)(-1) \\ &= -f'(2) = -(-13) = 13. \end{aligned} $ Το σημείο $A(2,12) \in C_f \Leftrightarrow f(2) = 12$, οπότε $ \begin{aligned} g(-1) &= f((-1)^2 + (-1) + 2) + 1 \\ &= f(2) + 1 \\ &= 12 + 1 = 13 \end{aligned} $ Αν τώρα (ε): $y = ax + \beta$ η εφαπτομένη αυτή, τότε $\alpha = g'(-1) = 13$ Άρα (ε): $y = 13x + \beta$ κι αφού το $B(-1, g(-1)) \in (ε)$ είναι $g(-1) = 13(-1) + \beta \Leftrightarrow 13 = -13 + \beta \Leftrightarrow \beta = 26$ Επομένως, (ε): $y = 13x + 26$	1 1 1 1 1 1 1 1
	Οι παρατηρήσεις $x_1, x_2, \dots, x_n$ μιας μεταβλητής X ακολουθούν κατανομή περίπου κανονική με μέση τιμή $\bar{x}$ και τυπική απόκλιση s , στην οποία το 16% έχουν τιμή τουλάχιστον ίση με $g(0) - 1$ ενώ το 97,5% έχουν τιμή που δεν ξεπερνά το $g'(-1)$.	
Δ3	Να αποδείξετε ότι $\bar{x} = 11$ και $s = 1$	7
	Είναι $g(0) - 1 = f(2) + 1 - 1 = 12$ και $g'(-1) = 13$	1
		3
	Το $50+34+13,5 = 97,5\%$ των παρατηρήσεων της κανονικής κατανομής είναι το πολύ ίσες με $\bar{x} + 2s$ κι εδώ με 13. Επομένως, $\bar{x} + 2s = 13$ (1)	1

	Επίσης, το $50-34=16\%$ των παρατηρήσεων είναι τουλάχιστον ίσες με $\bar{x} + s$ κι εδώ με 11, άρα: $\bar{x} + s = 12$ (2)	1
	Με αφαίρεση κατά μέλη των (1) και (2) βρίσκουμε $s = 1$ οπότε $\bar{x} + 1 = 12 \Leftrightarrow \bar{x} = 11$	1
Δ4	Εάν (ε): $y = 13x + 26$ και $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), \dots, M_v(x_v, y_v)$ σημεία της ευθείας (ε), τότε:	5
	α. Να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{y}$ των $y_1, y_2, \dots, y_v$	
	Είναι (ε): $y = 13x + 26 \Rightarrow y_i = 13x_i + 26$ για $i = 1, 2, \dots, v$	1
	Άρα $\bar{y} = 13\bar{x} + 26 = 13 \cdot 11 + 26 = 143 + 26 = 169$	1
	β. Να βρείτε την τυπική απόκλιση s_y των $y_1, y_2, \dots, y_v$	
	Επίσης, $s_y = 13 \cdot s = 13 \cdot 1 = 13$.	1
	γ. Είναι το δείγμα των $y_1, y_2, \dots, y_v$ ομοιογενές;	
	Ο συντελεστής μεταβολής του δείγματος των $y_1, y_2, \dots, y_v$ είναι $CV_y = \frac{s_y}{ \bar{y} } = \frac{13}{169} = \frac{13}{13^2} = \frac{1}{13}$	1
	Άρα $CV_y = \frac{1}{13} < \frac{1}{10}$, άρα το δείγμα είναι ομοιογενές.	1