

ΘΕΜΑ

Σε μία έρευνα μελετάται η απόδοση μιας ομάδας μαθητών σε ένα τεστ. Ο αριθμός $f(x)$, με $x \in [0,10]$, εκφράζει τη μέση βαθμολογία των μαθητών, όταν ο μέσος ημερήσιος χρόνος μελέτης είναι x ώρες, και δίνεται από τον τύπο:

$$f(x) = -x^3 + 12x^2 - 36x + 40$$

Επίσης, για 50 μαθητές καταγράφηκαν οι ώρες μελέτης τους και δόθηκε ο παρακάτω πίνακας συχνοτήτων:

Ώρες μελέτης x_i	n_i	f_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$
2	5				
4	10				
6	15				
8	12				
10	8				
Σύνολο					

Δ1. Να μεταφερθεί ο πίνακας στο τετράδιο και να συμπληρωθούν οι στήλες f_i , $f_i\%$, N_i , $F_i\%$.

Μονάδες 6

Δ2. Να υπολογιστούν: α) η μέση τιμή \bar{x} των ωρών μελέτης, β) η διάμεσος (δ) του δείγματος.

Μονάδες 6

Δ3. Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία στο $[0,10]$ και να βρεθούν τα τοπικά ακρότατά της.

Μονάδες 7

Δ4. Με βάση το αποτέλεσμα του Δ3, να βρεθεί για ποια τιμή του x η μέση βαθμολογία των μαθητών γίνεται μέγιστη. Στη συνέχεια να υπολογιστεί η μέγιστη αυτή βαθμολογία.

Μονάδες 3

Δ5. Να συγκριθεί η τιμή του x για την οποία η βαθμολογία μεγιστοποιείται με τη μέση τιμή \bar{x} των πραγματικών δεδομένων του πίνακα. Να χαρακτηριστεί αν οι μαθητές της έρευνας μελετούν, κατά μέσο όρο, λιγότερο, περισσότερο ή όσο χρειάζεται για να επιτευχθεί η μέγιστη μέση βαθμολογία.

Μονάδες 3

Απαντήσεις

Δ1. Να μεταφερθεί ο πίνακας στο τετράδιο και να συμπληρωθούν οι στήλες f_i , $f_i\%$, N_i , $F_i\%$.

Συμπληρωμένος πίνακας

Ώρες μελέτης x_i	ν_i	f_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$
2	5	0,10	10%	5	10%
4	10	0,20	20%	15	30%
6	15	0,30	30%	30	60%
8	12	0,24	24%	42	84%
10	8	0,16	16%	50	100%
Σύνολο	50	1	100%		

Δ2. Να υπολογιστούν: α) η μέση τιμή \bar{x} των ωρών μελέτης, β) η διάμεσος (δ) του δείγματος.

$$\bar{x} = 6,32$$

$$\delta = 6$$

Δ3. Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία στο $[0,10]$ και να βρεθούν τα τοπικά ακρότατά της.

$$f'(x) = -3x^2 + 24x - 36$$

Η $f'(x)$ είναι τριώνυμο δευτέρου βαθμού με:

- ρίζες $x = 2$ και $x = 6$
- συντελεστή του x^2 , $a = -3 < 0$

x	0	2	6	10		
$f'(x)$		-	0	+	0	-
$f(x)$		↘		↗		↘
			E		M	

- για $x \in [0, 2)$, $f'(x) < 0$
- για $x \in (2, 6)$, $f'(x) > 0$
- για $x \in (6, 10]$, $f'(x) < 0$

Άρα:

- η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, 2]$
- η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[2, 6]$
- η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[6, 10]$

Και τα ακρότατα:

$$f(2) = 8 \Rightarrow \text{ελάχιστο}$$

$$f(6) = 40 \Rightarrow \text{μέγιστο}$$

Δ4. Πότε μεγιστοποιείται η μέση βαθμολογία και ποια είναι αυτή;

Από το Δ3, η συνάρτηση έχει μέγιστο στο $x = 6$.

Άρα η μέση βαθμολογία μεγιστοποιείται όταν: $x = 6$

και η μέγιστη βαθμολογία είναι: $f(6) = 40$

Δ5. Σύγκριση του $x = 6$ με τη μέση τιμή \bar{x}

- τιμή που μεγιστοποιεί τη βαθμολογία: $x = 6$
- μέση τιμή πραγματικών δεδομένων: $\bar{x} = 6,32$

Εφόσον: $6,32 > 6$

οι μαθητές της έρευνας μελετούν κατά μέσο όρο **περισσότερο** από όσο χρειάζεται για να επιτευχθεί η μέγιστη μέση βαθμολογία.