

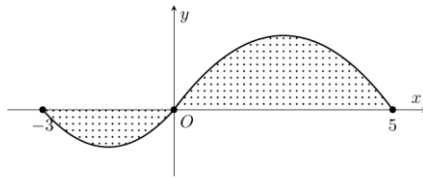
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ & ΜΟΡΙΟΔΟΤΗΣΗ
ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ 026 (ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ)

ΘΕΜΑ Α		
A1	Να αποδείξετε ότι : “Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό”.	7
	<p>Για $x \neq x_0$ έχουμε :</p> $f(x) - f(x_0) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot (x - x_0)$ <p>και $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot (x - x_0) \right]$</p> $= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)$ $= f'(x_0) \cdot 0 = 0,$ <p>αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0.</p> <p>Επομένως, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0.</p>	
A2	Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat.	4
	<p>Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε $f'(x_0) = 0$.</p>	
A3	Έστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A. Πότε θα λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο ;	4
	<p>Η συνάρτηση f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.</p> <p>Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού μεγίστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό μέγιστο της f.</p>	

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιο σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- i. Το εμβαδόν E του γραμμοσκιασμένου χωρίου του παρακάτω σχήματος είναι :

$$E = - \int_{-3}^0 f(x) dx + \int_0^5 f(x) dx$$



A4

10

ii. Ισχύει : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin x}{x} = 1$

- iii. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο καμπής "διαπερνά" την καμπύλη.

iv. Ισχύει : $(a^x)' = x \cdot a^{x-1}$, $a > 0$.

v. $\int_{\alpha}^{\beta} f'(x) \cdot g(x) dx = [f(x) \cdot g(x)]_{\alpha}^{\beta} + \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \cdot g'(x) dx$

α	β	γ	δ	ϵ
Σ	Λ	Σ	Λ	Λ

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $x \neq -1$, και $g(x) = \frac{1}{e^x}$, $x \in R$.

B1 Να ορίσετε τη συνάρτηση $h = f \circ g$.

5

$$D_f = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$$

$$D_g = R$$

$$D_h = D_{f \circ g} = \{x \in D_g / g(x) \in D_f\}$$

- $x \in D_g \Leftrightarrow x \in R$
- $g(x) \in D_f \Leftrightarrow g(x) \neq -1 \Leftrightarrow \frac{1}{e^x} \neq -1$, ισχύει.

Άρα : $D_h = R$

$$h(x) = (f \circ g)(x) = \frac{1}{\frac{1}{e^x} + 1} = \frac{e^x}{e^x + 1}.$$

B2 Αν $h(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$, $x \in R$, να αποδείξετε ότι η h είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντιστροφή της.

8

1^{ος} τρόπος

Έστω $x_1, x_2 \in R$ με $h(x_1) = h(x_2)$.

$$\begin{aligned} \text{Έχουμε : } h(x_1) = h(x_2) &\Leftrightarrow \frac{e^{x_1}}{e^{x_1} + 1} = \frac{e^{x_2}}{e^{x_2} + 1} \\ &\Leftrightarrow e^{x_1}(e^{x_2} + 1) = e^{x_2}(e^{x_1} + 1) \\ &\Leftrightarrow e^{x_1} e^{x_2} + e^{x_1} = e^{x_2} e^{x_1} + e^{x_2} \\ &\Leftrightarrow e^{x_1} = e^{x_2} \\ &\Leftrightarrow x_1 = x_2. \end{aligned}$$

Άρα η h είναι "1 - 1", επομένως αντιστρέφεται.

2^{ος} τρόπος

Η h είναι παραγωγίσιμη στο R

$$\begin{aligned} \text{με } h'(x) &= \left(\frac{e^x}{e^x + 1} \right)' = \frac{(e^x)'(e^x + 1) - e^x(e^x + 1)'}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{e^x(e^x + 1) - e^x e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^{2x} + e^x - e^{2x}}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} > 0. \end{aligned}$$

Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο R , επομένως αντιστρέφεται.

1ος τρόπος

Θέτουμε $h(x) = y$ και έχουμε :

$$\begin{aligned}h(x) = y &\Leftrightarrow \frac{e^x}{e^x+1} = y \\&\Leftrightarrow y(e^x + 1) = e^x \\&\Leftrightarrow y e^x + y = e^x \\&\Leftrightarrow e^x - y e^x = y \\&\Leftrightarrow e^x (1 - y) = y\end{aligned}$$

Αν $y = 1$, τότε : $e^x \cdot 0 = 1$, αδύνατο.

$$\text{Άρα } y \neq 1, \text{ οπότε } e^x = \frac{y}{1-y} \Leftrightarrow x = \ln \frac{y}{1-y}$$

$$\text{με } \frac{y}{1-y} > 0 \Leftrightarrow y(1-y) > 0 \Leftrightarrow y \in (0, 1).$$

$$\text{και } x \in D_h = \mathbb{R}.$$

Επομένως, $h^{-1}(x) = \ln \frac{x}{1-x}$, $x \in (0, 1)$.

2ος τρόπος

Η h είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} ,

άρα το σύνολο τιμών της είναι : $h(\mathbb{R}) = (\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x))$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{0}{0+1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)'}{(e^x+1)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$$

Άρα : $h(\mathbb{R}) = (0, 1)$, οπότε : $D_{h^{-1}} = h(\mathbb{R}) = (0, 1)$.

Θέτουμε $h(x) = y$, $y \in (0, 1)$, και έχουμε :

$$\begin{aligned}h(x) = y &\Leftrightarrow \frac{e^x}{e^x+1} = y \\&\Leftrightarrow y(e^x + 1) = e^x \\&\Leftrightarrow y e^x + y = e^x \\&\Leftrightarrow e^x - y e^x = y \\&\Leftrightarrow e^x (1 - y) = y \\&\Leftrightarrow e^x = \frac{y}{1-y}\end{aligned}$$

	$\Leftrightarrow x = \ln \frac{y}{1-y} \text{ με } x \in D_h = \mathbb{R}.$ <p>Επομένως, $h^{-1}(x) = \ln \frac{x}{1-x}$, $x \in (0,1)$.</p>	
B3	<p>Αν $h^{-1}(x) = \ln \frac{x}{1-x}$, $x \in (0,1)$, να βρείτε τος ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της h^{-1}.</p>	6
	<p>α) Κατακόρυφη ασύμπτωτη</p> <ul style="list-style-type: none"> $\lim_{x \rightarrow 0^+} h^{-1}(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \frac{x}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x - \lim_{x \rightarrow 0^+} (1-x) = -\infty - 0 = -\infty$ <p>Άρα η ευθεία $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της $C_{h^{-1}}$.</p> $\lim_{x \rightarrow 1^-} h^{-1}(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln \frac{x}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln x - \lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) = 0 + \infty = +\infty$ <p>Άρα η ευθεία $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της $C_{h^{-1}}$.</p> <p>β) Οριζόντια ή πλάγια ασύμπτωτη</p> <p>Επειδή $D_{h^{-1}} = (0,1)$, η γραφική παράστασης της h^{-1} δεν έχει οριζόντια ή πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ και το $-\infty$.</p>	
B4	<p>Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) \cdot \eta\mu g(x)]$.</p>	6
	$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) \cdot \eta\mu g(x)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{x+1} \cdot \eta\mu \frac{1}{e^x} \right].$ <p>Το $\lim_{x \rightarrow -\infty} \eta\mu \frac{1}{e^x} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \eta\mu u$ δεν υπάρχει.</p> <p>(Θέτουμε $u = \frac{1}{e^x}$, $u \rightarrow +\infty$)</p> <p><u>1ος τρόπος</u></p> <p>Για $x < -1$, $-1 \leq \eta\mu \frac{1}{e^x} \leq 1 \iff -\frac{1}{x+1} \geq \frac{1}{x+1} \cdot \eta\mu \frac{1}{e^x} \geq \frac{1}{x+1}$</p> $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{x+1} \right) = 0$ <p>Άρα, από το κριτήριο παρεμβολής: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{x+1} \cdot \eta\mu \frac{1}{e^x} \right] = 0$.</p>	

2ος τρόπος

Ισχύει ότι : $\left| \eta\mu \frac{1}{e^x} \right| \leq 1,$

Οπότε : $\left| \frac{1}{x+1} \cdot \eta\mu \frac{1}{e^x} \right| = \left| \frac{1}{x+1} \right| \cdot \left| \eta\mu \frac{1}{e^x} \right| \leq \left| \frac{1}{x+1} \right|$

και $-\left| \frac{1}{x+1} \right| \leq \left| \frac{1}{x+1} \cdot \eta\mu \frac{1}{e^x} \right| \leq \left| \frac{1}{x+1} \right|.$

Είναι : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left| \frac{1}{x+1} \right| = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\left| \frac{1}{x+1} \right| \right) = 0$

Άρα, από το κριτήριο παρεμβολής : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{x+1} \cdot \eta\mu \frac{1}{e^x} \right] = 0..$

ΘΕΜΑ Γ

ΘΕΜΑ Γ		
	<p>Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν :</p> <ul style="list-style-type: none"> • $xf'(x) + 1 = -f(x) - \ln x$ για κάθε $x > 0$ • $f(1) = 1$ <p>και συνάρτηση $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = x(f(x) + \ln x)$ για κάθε $x > 0$.</p>	
Γ1	<p>Να αποδείξετε ότι :</p> <p>i. η g είναι σταθερή συνάρτηση στο $(0, +\infty)$,</p> <p>ii. ο τύπος της f είναι $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.</p>	6
	<p>i. Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ και παραγωγίσιμη με</p> $g'(x) = [x(f(x) + \ln x)]'$ $= f(x) + \ln x + x \left(f'(x) + \frac{1}{x} \right)$ $= f(x) + \ln x + x f'(x) + 1$ $= f(x) + \ln x - f(x) - \ln x$ $= 0, \text{ άρα η } g \text{ είναι σταθερή στο } (0, +\infty).$	4
	<p>ii. Υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ ώστε $g(x) = c \Leftrightarrow x(f(x) + \ln x) = c$.</p> <p>Για $x = 1$: $1 \cdot (f(1) + \ln 1) = c \Leftrightarrow c = 1$.</p> <p>Άρα : $x(f(x) + \ln x) = c \Leftrightarrow x(f(x) + \ln x) = 1$</p> $\Leftrightarrow f(x) + \ln x = \frac{1}{x}$ $\Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{x} - \ln x.$	2
Γ2	<p>Να αποδείξετε ότι :</p> <p>i. η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$</p> <p>ii. η εξίσωση $x^x = e$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(1, e)$.</p>	5
i	<p>Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ και παραγωγίσιμη με</p> $f'(x) = \left(\frac{1}{x} - \ln x \right)' = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} < 0,$ <p>άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.</p>	2
ii	<p>Έχουμε :</p> $x^x = e \Leftrightarrow \ln x^x = \ln e \Leftrightarrow x \ln x = 1 \Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow f(x) = 0.$	3

1ος τρόπος

Έχουμε :

$$x^x = e \Leftrightarrow \ln x^x = \ln e \Leftrightarrow x \ln x = 1 \Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow f(x) = 0.$$

- f συνεχής στο $[1, e]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων
- $f(1) = 1 > 0$
 $f(e) = \frac{1}{e} - 1 < 0$
 $f(1) \cdot f(e) < 0$

Επομένως, από το Θ. Bolzano, η εξίσωση $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^x - e = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1, e)$.

Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα, η ρίζα είναι μοναδική.

2ος τρόπος

Έχουμε :

$$x^x = e \Leftrightarrow \ln x^x = \ln e \Leftrightarrow x \ln x = 1 \Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow f(x) = 0.$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A = (1, e)$,

$$\text{Επομένως : } f(A) = f((1, e)) = \left(\lim_{x \rightarrow e^-} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \right).$$

$$\lim_{x \rightarrow e^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow e^-} \left(\frac{1}{x} - \ln x \right) = \frac{1}{e} - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{x} - \ln x \right) = 1 - 0 = 1$$

$$\text{Άρα : } f(A) = \left(\frac{1}{e} - 1, 1 \right).$$

$0 \in f(A)$, άρα η $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0, 1)$.

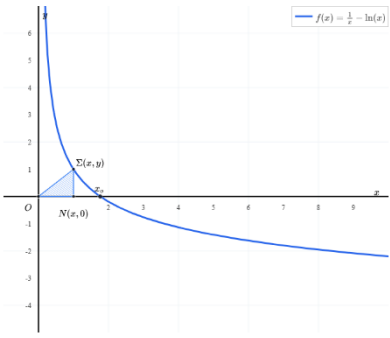
Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα, η ρίζα είναι μοναδική.

3ος τρόπος

$$x^x = e \Leftrightarrow x^x - e = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = x^x - e$, $x \in [1, e]$.

	<ul style="list-style-type: none"> • φ συνεχής στο $[1, e]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων • $\varphi(1) = 1 - e < 0$ $\varphi(e) = e^e - e > 0$ $\varphi(1) \cdot \varphi(e) < 0$ <p>Επομένως, από το Θ. Bolzano, η εξίσωση $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x^x - e = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1, e)$.</p> <p>Η συνάρτηση φ είναι παραγωγίσιμη στο $(1, e)$ με $\varphi'(x) = (x^x - e)' = (x^x)' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} \cdot (x \ln x)'$ $= e^{x \ln x} \cdot (\ln x + 1) = x^x \cdot (\ln x + 1) > 0$ για κάθε $x \in (1, e)$.</p> <p>Άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, e)$, επομένως η ρίζα είναι μοναδική.</p>	
	Αν x_0 η ρίζα του ερωτήματος Γ2 ii, τότε :	
Γ3	<p>i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή και να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $M(x_0, f(x_0))$.</p> <p>ii. Να λύσετε την εξίσωση : $x_0 \cdot (x_0 f(x) + x - x_0) = -x + x_0$.</p>	9
i.	<p>Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^2} > 0$, άρα f κυρτή.</p> <p>Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(x_0, f(x_0))$ είναι η ευθεία</p> $\varepsilon: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - 0 = \left(-\frac{1}{x_0^2} - \frac{1}{x_0}\right)(x - x_0)$ $\Leftrightarrow y = -\frac{x_0+1}{x_0^2}(x - x_0)$ $\Leftrightarrow y = -\frac{x_0+1}{x_0^2}x + \frac{x_0+1}{x_0}.$	5
ii.	$x_0 \cdot (x_0 f(x) + x - x_0) = -x + x_0 \Leftrightarrow x_0^2 f(x) + x_0 x - x_0^2 = -x + x_0$ $\Leftrightarrow x_0^2 f(x) = -x_0 x + x_0^2 + -x + x_0$ $\Leftrightarrow x_0^2 f(x) = -(x_0 + 1)x + x_0(x_0 + 1)$ $\Leftrightarrow f(x) = -\frac{x_0+1}{x_0^2}x + \frac{x_0+1}{x_0}.$ <p>Παρατηρούμε ότι το δεύτερο μέλος της εξίσωσης είναι η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $M(x_0, f(x_0))$.</p> <p>Η f είναι κυρτή, άρα η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη σε οποιοδήποτε σημείο.</p>	4

	<p>Επομένως, ισχύει : $f(x) \geq -\frac{x_0+1}{x_0^2} x + \frac{x_0+1}{x_0}$.</p> <p>Η ισότητα ισχύει μόνο για την τετμημένη του σημείου επαφής, δηλαδή για $x = x_0$.</p>	
<p>Γ4</p>	<p>Ένα κινητό $\Sigma(x, f(x))$ ξεκινά από το σημείο $M(x_0, f(x_0))$ και κινείται στη γραφική παράσταση της f με την τετμημένη του να ελαττώνεται με ρυθμό $2 \text{ cm} / \text{s}$. Αν E το εμβαδόν του τριγώνου $ON\Sigma$ που ορίζουν τα σημεία $O(0,0), N(x,0)$ και $\Sigma(x, f(x))$, με $0 < x < x_0$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού E τη χρονική στιγμή που το Σ διέρχεται από σημείο $A(1,1)$.</p>	<p>5</p>
	<p>Δίνεται ότι : $x'(t) = -2 \text{ cm} / \text{sec}$ και $x'(t_0) = 1 \text{ cm} / \text{sec}$</p> <p>Έχουμε :</p> $E = (ON\Sigma) = \frac{1}{2} \cdot (ON) \cdot (N\Sigma)$ $= \frac{1}{2} x \cdot f(x) $ <p>Όμως $0 < x < x_0$, άρα : $x = x$ και, επειδή f γνησίως φθίνουσα, $f(x) > f(x_0) \Leftrightarrow f(x) > 0$, άρα : $f(x) = f(x)$.</p> $E = \frac{1}{2} x \cdot f(x) - \frac{1}{2} x \left(\frac{1}{x} - \ln x \right) = \frac{1}{2} (1 - x \ln x).$ <p>Επομένως : $E(t) = \frac{1}{2} (1 - x(t) \ln x(t))$.</p> $E'(t) = \left(\frac{1}{2} (1 - x(t) \ln x(t)) \right)'$ $= \frac{1}{2} [-x'(t) \ln x(t) - x(t) \frac{1}{x(t)} x'(t)]$ $= \frac{1}{2} [-x'(t) \ln x(t) - x'(t)]$ $= -\frac{1}{2} x'(t) (1 + \ln x(t))$ <p>Για $t = t_0$: $E'(t_0) = -\frac{1}{2} x'(t_0) (1 + \ln x(t_0))$ $= -\frac{1}{2} (-2)(1 + \ln 1) = 1 \text{ cm}^2 / \text{s}.$</p>	

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} e^{-x^2+\alpha}, & x \leq 0 \\ x^2 \cdot e^{1-x} + 1, & x > 0 \end{cases}$,
για την οποία ισχύει $f(0) \cdot \ln x \leq x - 1$, για κάθε $x > 0$,

Δ1 Να αποδείξετε ότι $f(0) = 1$ και $\alpha = 0$.

4

Έστω συνάρτηση φ με $\varphi(x) = f(0) \cdot \ln x - x + 1$ για κάθε $x > 0$:

- $\varphi(x) \leq 0$ για κάθε $x > 0$
 $\varphi(1) = f(0) \cdot \ln 1 - 1 + 1 = 0$
 Άρα $\varphi(x) \leq \varphi(1)$, δηλαδή η φ στο $x_0 = 1$, εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της, παρουσιάζει ακρότατο (ολικό μέγιστο)
- φ παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $\varphi'(x) = f(0) \cdot \frac{1}{x} - 1$

Οπότε, από το θεώρημα Fermat, έχουμε :

$$\varphi'(1) = 0 \Leftrightarrow f(0) \cdot 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow f(0) = 1.$$

Από τον τύπο της f για $x = 0$ θα πάρουμε :

$$f(0) = e^{0+\alpha} \Leftrightarrow 1 = e^\alpha \Leftrightarrow \alpha = 0.$$

Δ2 i. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
 ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in (1, 3)$ ισχύει η ανίσωση :
 $f(\ln(x - 1)) \leq f(x - 2)$.
 Πότε ισχύει η ισότητα ;

10

i. Για $\alpha = 0$ έχουμε : $f(x) = \begin{cases} e^{-x^2}, & x \leq 0 \\ x^2 \cdot e^{1-x} + 1, & x > 0 \end{cases}$

4

Ελέγχω τη συνέχεια της f στο $x_0 = 0$ που η συνάρτηση αλλάζει τύπο.

$$f(0) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-x^2} = e^0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 \cdot e^{1-x}) = 0 + 1 = 1$$

$$f(0) = 1$$

$$\text{Οπότε : } f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x),$$

άρα η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

$$\text{Για } x < 0 \text{ έχουμε : } f'(x) = (e^{-x^2})'$$

$$= e^{-x^2} \cdot (-2x)$$

$$= -2xe^{-x^2} > 0 \text{ για κάθε } x < 0$$

$$\text{Για } x > 0 \text{ έχουμε : } f'(x) = (x^2 \cdot e^{1-x} + 1)'$$

$$= 2x \cdot e^{1-x} - x^2 \cdot e^{1-x}$$

$$= e^{1-x} x(2-x) \text{ για κάθε } x > 0$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{1-x}(2x-x^2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 2$$

Το πρόσημο της f' εξαρτάται από το $2-x$, αφού $x > 0$ και $e^{1-x} > 0$, οπότε προκύπτει οπ πίνακας μεταβολών της f .

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
f'	+		+	-
f		(0)	$1 + \frac{4}{e}$	(1)

Αφού η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, έχουμε :

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 2]$
- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[2, +\infty)$

Στο $x_0 = 2$ η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο, το $f(2) = 2^2 \cdot e^{1-2} + 1 = \frac{4}{e} + 1$.

Σύνολο Τιμών της f

Αν $\Delta_1 = (-\infty, 2]$, διάστημα στο οποίο η f είναι γνήσια αύξουσα,

$$\text{τότε : } f(\Delta_1) = (\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(2)) = \left(0, \frac{4}{e} + 1\right]$$

διότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{-x^2}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^u) = 0$ (θέτω $u = -x^2 \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty$)

Αν $\Delta_2 = (2, +\infty)$, διάστημα στο οποίο η f είναι γνήσια φθίνουσα,

$$\text{τότε : } f(\Delta_2) = (\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(2)) = \left(1, \frac{4}{e} + 1\right)$$

διότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 e^{1-x} + 1) = \{+\infty \cdot 0 + 1 = \alpha.\mu\}$, οπότε υπολογίζω :

	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 e^{1-x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{e^{x-1}} \right) \stackrel{+\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x}{e^{x-1}} \right) \stackrel{+\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{e^{x-1}} \right) = 0,$ <p style="text-align: center;">χρησιμοποιώντας τον κανόνα DL'H.</p> <p>Άρα : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 e^{1-x} + 1) = 0 + 1 = 1$</p> <p>Συνολικά έχουμε : $f(A) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = (0, \frac{4}{e} + 1]$.</p>	
ii.	<p>Θα δείξουμε ότι ισχύει $f(\ln(x-1)) \leq f(x-2)$ για κάθε $x \in (1, 3)$.</p> <p>Ελέγχουμε που βρίσκονται οι τιμές $\ln(x-1)$ και $x-2$, για $x \in (1, 3)$ οπότε :</p> $1 < x < 3 \Leftrightarrow 1 - 1 < x - 1 < 3 - 1 \Leftrightarrow 0 < x - 1 < 2,$ <p style="text-align: center;">άρα $\ln(x-1) < \ln 2 < 2 (= \ln e^2, 2 < e^2)$</p> $1 < x < 3 \Leftrightarrow 1 - 2 < x - 2 < 3 - 2 \Leftrightarrow -1 < x - 2 < 1$ <p>Οπότε $\ln(x-1), x-2 \in \Delta_1$ με $\Delta_1 = (-\infty, 2]$, διάστημα στο οποίο η f είναι γνήσια αύξουσα.</p> <p>Άρα : $f(\ln(x-1)) \leq f(x-2) \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} \ln(x-1) \leq x-2 \Leftrightarrow \ln(x-1) \leq (x-1) - 1$ που ισχύει από την βασική ανίσωση $\ln x \leq x-1$ για κάθε $x > 0$, το ίσον μόνο για $x=1$.</p> <p>Επομένως, αν βάλω όπου x το $x-1$, έχω την παραπάνω ανίσωση,</p> <p>Δηλαδή : $\ln(x-1) \leq (x-1) - 1$.</p> <p>Η ισότητα ισχύει, όταν $x-1=1 \Leftrightarrow x=2$.</p>	6
Δ3	<p>Αν F είναι μια παράγουσα της f στο \mathbb{R}, να αποδείξετε ότι :</p> $ F(\beta) - F(\alpha) \leq \left(\frac{4}{e} + 1 \right) \cdot \beta - \alpha , \text{ για κάθε } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$	4
	<p>Αφού F είναι η αρχική της f, άρα : $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$..</p> <p>Έχουμε κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, άρα διακρίνω περιπτώσεις για τα α, β.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Αν $\alpha = \beta$, τότε πρέπει να δείξω ότι ισχύει : $F(\alpha) - F(\alpha) \leq \left(\frac{4}{e} + 1 \right) \cdot \alpha - \alpha \Leftrightarrow 0 \leq 0 \text{ δηλαδή ισχύει το ίσον.}$ • Αν $\alpha \neq \beta$, τότε αν $\alpha < \beta$ (όμοια για $\alpha > \beta$) έχουμε : Η συνάρτηση F είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ (αφού είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R}) Η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) με $F'(x) = f(x)$. 	

Άρα ισχύει το Θεώρημα Μέσης Τιμής,

δηλαδή υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $F'(\xi) = \frac{F(\beta) - F(\alpha)}{\beta - \alpha}$

ή ισοδύναμα $f(\xi) = \frac{F(\beta) - F(\alpha)}{\beta - \alpha}$ (1)

Θέλω να δείξω ότι : $|F(\beta) - F(\alpha)| \leq \left(\frac{4}{e} + 1\right) \cdot |\beta - \alpha|$ με $\alpha < \beta$ άρα $\beta - \alpha > 0$

1ος τρόπος

Θα δείξω ότι : $|F(\beta) - F(\alpha)| \leq \left(\frac{4}{e} + 1\right) \cdot |\beta - \alpha| \Leftrightarrow \left| \frac{F(\beta) - F(\alpha)}{\beta - \alpha} \right| \leq \left(\frac{4}{e} + 1\right) \Leftrightarrow |f(\xi)| \leq \left(\frac{4}{e} + 1\right)$

Αλλά γνωρίζουμε από το Δ1 ότι : $f(A) = (0, \frac{4}{e} + 1]$, δηλαδή $0 < f(x) \leq \frac{4}{e} + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε για $x = \xi$

Ισχύει : $0 < f(\xi) \leq \frac{4}{e} + 1$, άρα και $|f(\xi)| \leq \left(\frac{4}{e} + 1\right)$,

οπότε $|F(\beta) - F(\alpha)| \leq \left(\frac{4}{e} + 1\right) \cdot |\beta - \alpha|$, για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

2ος τρόπος

Αφού F είναι η αρχική της f , άρα : $F'(x) = f(x) \in (0, \frac{4}{e} + 1]$ ή $F'(x) = f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Οπότε η F είναι γνήσια αύξουσα στο \mathbb{R} .

Αφού έχουμε $\alpha < \beta$ άρα $F(\alpha) < F(\beta)$,

οπότε θα δείξουμε ότι $F(\beta) - F(\alpha) \leq \left(\frac{4}{e} + 1\right) \cdot (\beta - \alpha)$.

Εφαρμόζω το Θ.Μ.Τ. για F στο διάστημα $[\alpha, \beta]$. Δηλαδή

Η συνάρτηση F είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ (αφού είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R})

Η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) με $F'(x) = f(x)$

Άρα ισχύει το Θεώρημα Μέσης Τιμής, δηλαδή υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε

$F'(\xi) = \frac{F(\beta) - F(\alpha)}{\beta - \alpha}$ ή ισοδύναμα $f(\xi) = \frac{F(\beta) - F(\alpha)}{\beta - \alpha}$ (1)

Αλλά γνωρίζουμε από το Δ1 ότι : $f(A) = (0, \frac{4}{e} + 1]$,

δηλαδή $0 < f(x) \leq \frac{4}{e} + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε για $x = \xi$

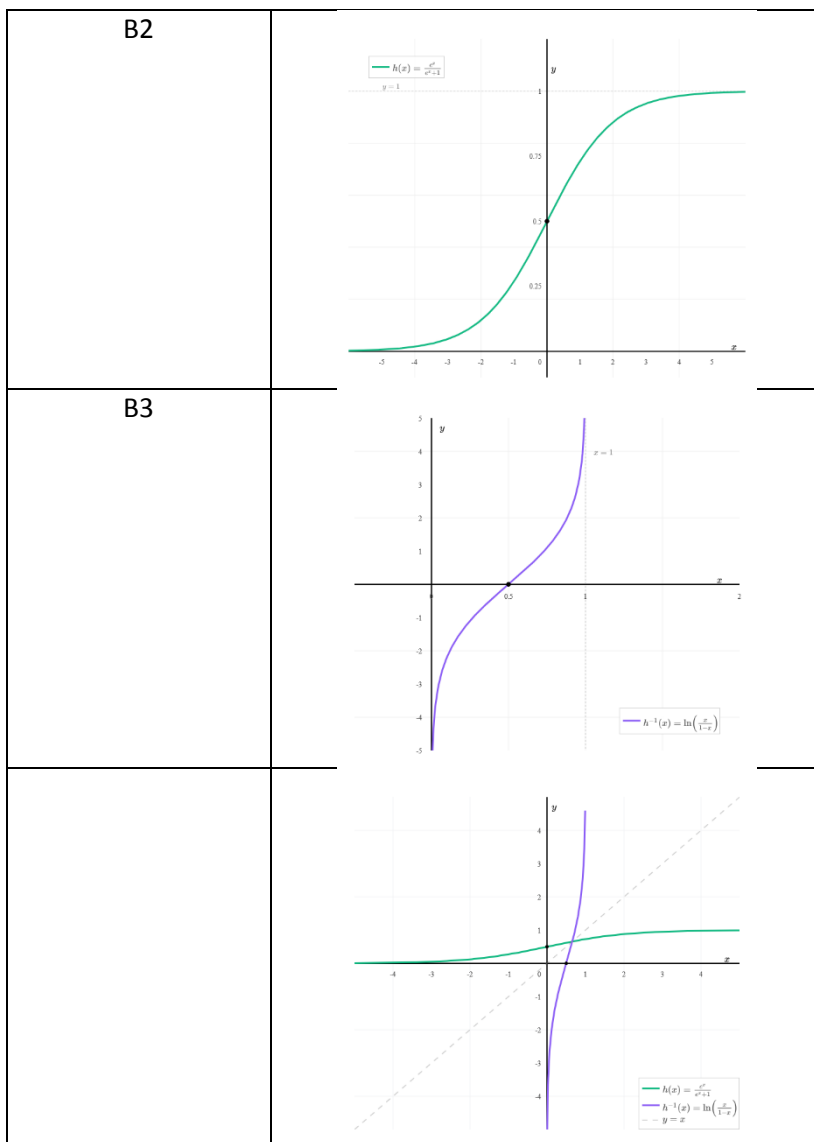
Ισχύει : $0 < f(\xi) \leq \frac{4}{e} + 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{F(\beta) - F(\alpha)}{\beta - \alpha} < \frac{4}{e} + 1 \Leftrightarrow F(\beta) - F(\alpha) \leq \left(\frac{4}{e} + 1\right) \cdot (\beta - \alpha)$ αφού $\alpha < \beta$, άρα $\beta - \alpha > 0$.

	<p>οπότε : $F(\beta) - F(\alpha) \leq \left(\frac{4}{e} + 1\right) \cdot \beta - \alpha$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.</p>	
<p>Δ4</p>	<p>Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in [-1, 0]$ ισχύει : $e^{-x^2} \geq 1 - x^2$. Στη συνέχεια, αν E το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και τις κατακόρυφες ευθείες $x = -1$ και $x = 1$, να αποδείξετε ότι : $E > 2e - \frac{10}{3}$.</p>	7
	<p>Από την βασική ανίσωση $e^x \geq x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, το ίσον μόνο για $x = 0$ προκύπτει, αν στη θέση του x βάλουμε το $-x^2$, η ανίσωση : $e^{-x^2} \geq -x^2 + 1 \Leftrightarrow 1 - x^2 \leq e^{-x^2}$</p>	
	<p>Για το εμβαδόν E έχουμε : $E = \int_{-1}^1 f(x) dx$ και $f(x) > 0$ από το σύνολο τιμών της f. Άρα : $E = \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx = I_1 + I_2$.</p> <p>$I_1 = \int_{-1}^0 f(x) dx = \int_{-1}^0 e^{-x^2} dx$.</p> <p>Από το προηγούμενο ερώτημα ισχύει : $e^{-x^2} \geq 1 - x^2$ για κάθε $x \in (-1, 0)$.</p> <p>Η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$, επομένως προκύπτει : $I = \int_{-1}^0 e^{-x^2} dx > \int_{-1}^0 (1 - x^2) dx$.</p> <p>Άρα $I_1 > \int_{-1}^0 (1 - x^2) dx = \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^0 = 0 - \left(-1 + \frac{1}{3} \right) = \frac{2}{3}$.</p> <p>$I_2 = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x^2 e^{1-x} + 1) dx = \int_0^1 (x^2 e^{1-x}) dx + \int_0^1 1 dx = \int_0^1 \left(x^2 (-e^{1-x})' \right) dx + [x]_0^1$ $I_2 = \left[-x^2 e^{1-x} \right]_0^1 - \int_0^1 (x^2)' (-e^{1-x}) dx + 1 = -1e^{1-1} + 0 + \int_0^1 2xe^{1-x} dx + 1 = -1 + \int_0^1 2x(-e^{1-x})' dx + 1$ $I_2 = \int_0^1 2x(-e^{1-x})' dx = \left[-2xe^{1-x} \right]_0^1 - \int_0^1 (2x)' (-e^{1-x}) dx = -2 - 0 + 2 \int_0^1 e^{1-x} dx = -2 + 2 \left[-e^{1-x} \right]_0^1$ $I_2 = -2 + 2(-1 + e) = 2e - 4$</p> <p>Άρα $I_1 > \frac{2}{3}$, $I_2 = 2e - 4$ και $E = I_1 + I_2$</p> <p>Οπότε : $E = I_1 + I_2 > \frac{2}{3} + 2e - 4 \Rightarrow E > 2e - \frac{10}{3}$</p>	

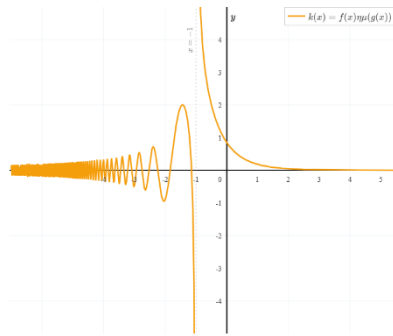
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Β

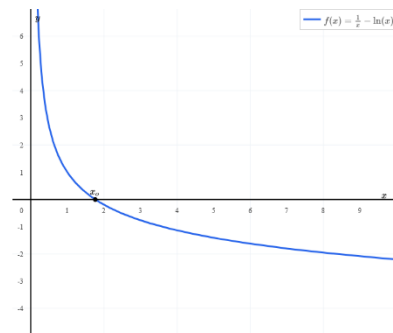


B4

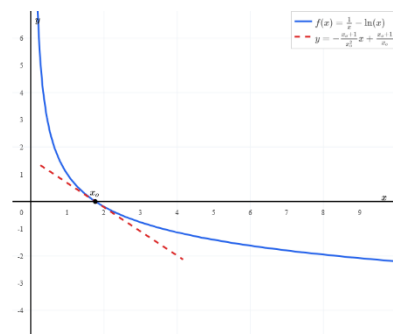


ΘΕΜΑ Γ

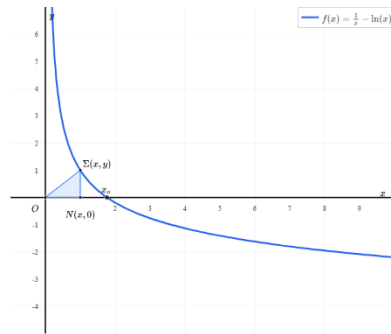
Γ2



Γ3

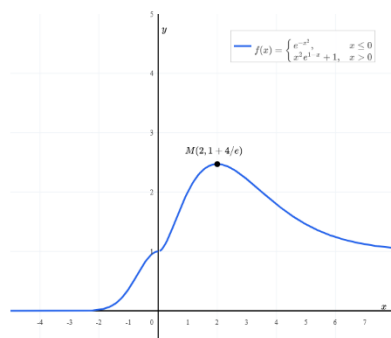


Γ5



ΘΕΜΑ Δ

Δ2



Δ4

