ΑΝΑΛΥΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ
ΜΑΡΤΙΟΣ 2026

ΘΕΜΑ Α

Α1. Η παράγωγος της f μπορεί να είναι η Τ, αφού η f είναι παραβολή της μορφής $f(x) = \alpha x^2 + \beta$ της οποίας η παράγωγος είναι της μορφής f΄(x)=2αx, δηλαδή ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Η παράγωγος της g μπορεί είναι η Η, αφού η g δεν είναι συνεχής στο σημείο x=0, άρα δεν θα είναι και παραγωγίσιμη στο x=0, συνθήκη που ικανοποιείται μόνο από την γραφική παράσταση Η.

Α2. **Διατύπωση**

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα *Δ* και x_0 ένα **εσωτερικό** σημείο του *Δ*. Αν η f παρουσιάζει **τοπικό ακρότατο** στο x_0 και είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο αυτό, τότε:

$$f'(x_0) = 0$$

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του *Δ* και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε:

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset \Delta \quad \text{και}$$

$$f(x) \leq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) . \quad (1)$$

Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, ισχύει

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} .$$

Επομένως,

— αν $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, τότε λόγω της (1), θα είναι

$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$, οπότε θα έχουμε:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad (2)$$

— αν$x \in (x_0, x_0 + \delta)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι

$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$, οπότε θα έχουμε:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad (3)$$

Έτσι, από τις (2) και (3) έχουμε $f'(x_0) = 0$ ■

Δεν ισχύει το αντίστροφο του Θεωρήματος του Fermat, δηλαδή αν f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ με x_0 εσωτερικό σημείο του Δ και $f'(x_0) = 0$ δεν σημαίνει, υποχρεωτικά, ότι η f έχει τοπικό ακρότατο στο σημείο x_0.

Δικαιολόγηση:

Αναζητούμε ένα παράδειγμα που επιβεβαιώνει τον παραπάνω ισχυρισμό μας:

Θέλουμε παράδειγμα όπου **ισχύει** $f'(x_0) = 0$ αλλά το εσωτερικό σημείο x_0του πεδίου ορισμού της f **δεν είναι ακρότατο**, ώστε να δείξουμε ότι **το αντίστροφο** του Θεωρήματος του Fermat δεν ισχύει.

Έστω η συνάρτηση:

$$f(x) = x^3, x \in \mathbb{R}$$

Υπολογίζουμε την παράγωγο:

$$f'(x) = 3x^2, x \in \mathbb{R}$$

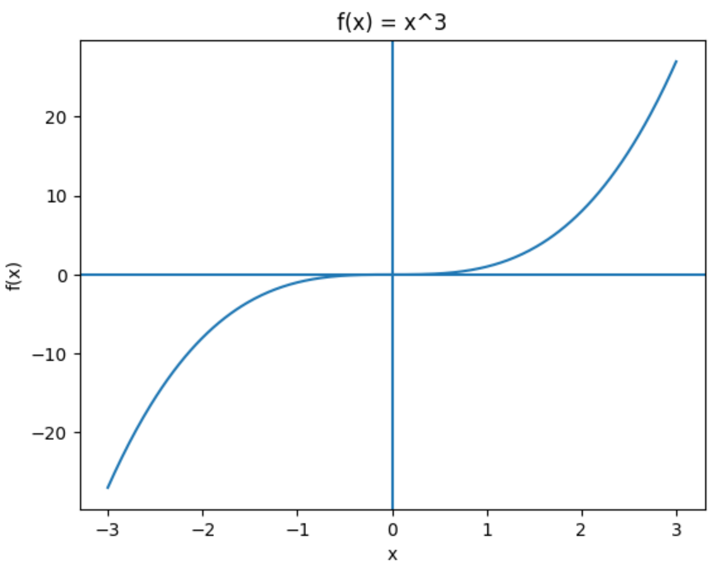
Στο xo $= 0$:

$$f'(0) = 0$$

Ωστόσο το *σημείο* $x_0 = 0$ δεν είναι ακρότατο της f , αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και τα όρια είναι:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

Μπορούμε να το δούμε αυτό και γραφικά από το επόμενο σχήμα για τη συνάρτηση $f(x) = x^3, x \in \mathbb{R}$:



Α3.

α. Λάθος **β.** Λάθος **γ.** Λάθος **δ.** Σωστό **ε.** Λάθος

Α4. Η πρόταση συμπληρώνεται ορθά από το (γ). Αποτελεί ουσιαστικά το συμπέρασμα του Θεωρήματος του Rolle, αφού η f είναι και συνεχής στο [α, β] (διότι είναι παραγωγίσιμη σε αυτό) και προφανώς για τον ίδιο λόγο είναι και παραγωγίσιμη στο (α, β).

Επομένως υπάρχει, ένα τουλάχιστον, ξ στο (α, β), τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$, δηλαδή υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f'(x) = 0$.

<u>ΘΕΜΑ Β</u>

Β1. Ο πίνακας προσήμου της f΄ (μονοτονίας της f) είναι ο επόμενος:

-4 -3 -1/2 2 3

x				
f΄(x)	−	+	−	+
f(x)	↘	↗	↘	↗

Μονοτονία της f:

Στο διάστημα $(-4, -3]$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Στο διάστημα $(-3, -\frac{1}{2}]$ είναι γνησίως αύξουσα.

Στο διάστημα $(-\frac{1}{2}, 2]$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Στο διάστημα $(2, 3)$ είναι γνησίως αύξουσα.

Στο σημείο $x_1 = -3$ έχει τοπικό ελάχιστο , το $f(-3)$.

Στο σημείο $x_3 = 2$ έχει τοπικό ελάχιστο , το $f(2)$.

Στο σημείο $x_2 = -\frac{1}{2}$, έχει τοπικό μέγιστο, το $f\left(-\frac{1}{2}\right)$, το οποίο είναι και ολικό μέγιστο της f στο $[-4, 3]$.

Β2. Ο πίνακας[1] για τα κοίλα της συνάρτησης f είναι ο επόμενος:

-4 -2 1 3

x			
f΄(x)	↗	↘	↗
f(x)	∪	∩	∪

[1] Στον πίνακα για την κυρτότητα δεν μπορούμε να συμπεριλάβουμε την f΄΄ (x), αφού δεν γνωρίζουμε αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της.

Στο διάστημα $[-4,-2]$ η f στρέφει τα κοίλα άνω (είναι κυρτή).

Στο διάστημα $(-2,1]$ η f στρέφει τα κοίλα κάτω (είναι κοίλη).

Στο διάστημα $(1,3]$ η f στρέφει τα κοίλα άνω (είναι κυρτή).

Τα σημεία $\mathrm{K}(-2,\mathrm{f}(-2))$ και $\Lambda(1,\mathrm{f}(1))$ είναι σημεία καμπής της f.

B3. Αφού $-\frac{1}{2}<\frac{3}{2}<2$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[-\frac{1}{2,},2\right]$ έχουμε:

$f\left(-\frac{1}{2}\right)>f\left(\frac{3}{2}\right)>f(2)$ ή

$$f(2)\leq f\left(\frac{3}{2}\right)\leq f\left(-\frac{1}{2}\right)$$

η σε φθίνουσα σειρά: $f\left(-\frac{1}{2}\right), f\left(\frac{3}{2}\right), f(2)$.

B4. Αφού η f στο διάστημα $[1,3]$ είναι κυρτή, η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο της $\mathrm{x}_0\in[1,3]$ (άρα και στο σημείο $\mathrm{x}_0=\frac{3}{2}$) θα βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f (και ειδικά στο σημείο επαφής , στο $A\left(\frac{3}{2},f\left(\frac{3}{2}\right)\right)$, θα ισχύει η ισότητα).

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $\mathrm{A}\left(\frac{3}{2},\mathrm{f}\left(\frac{3}{2}\right)\right)$ είναι:

$$\mathrm{y}=\mathrm{f}'\left(\frac{3}{2}\right)\left(\mathrm{x}-\frac{3}{2}\right)+\mathrm{f}\left(\frac{3}{2}\right)$$

Δηλαδή για κάθε $\mathrm{x}\in[1,3]$ θα ισχύει:

$$\mathrm{f}(\mathrm{x})\geq\mathrm{f}'\left(\frac{3}{2}\right)\left(\mathrm{x}-\frac{3}{2}\right)+\mathrm{f}\left(\frac{3}{2}\right)$$

Στην τελευταία σχέση, παίρνοντας και στα δύο μέλη ορισμένο ολοκλήρωμα, με άκρα τα 1 και 3, έχουμε:

$$\int_1^3 f(x)dx\geq\int_1^3\left[f'\left(\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)+f\left(\frac{3}{2}\right)\right]dx$$

και $E=\int_1^3|f(x)|dx=\int_1^3 f(x)dx$ αφού για κάθε $x\in[1,3]$ έχουμε:

$f(x)\geq f(2)=1>0$ $(\textit{το } f(2) \textit{ είναι ολικό ελάχιστο})$ άρα:

$$E\geq f'\left(\frac{3}{2}\right)\left[\frac{x^2}{2}-\frac{3}{2}x\right]_1^3+f\left(\frac{3}{2}\right)(3-1)$$

$$E\geq f'\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot 1+2f\left(\frac{3}{2}\right)$$

ή τελικά:

$$\mathrm{E}\geq\mathrm{f}'\left(\frac{3}{2}\right)+2\mathrm{f}\left(\frac{3}{2}\right)$$

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Γ1. Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,+\infty)$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $διάστημα$ $(0,+\infty)$) με:

$$g'(x) = 2f(x) + 2xf'(x) + 2xf'(x) + x^2f''(x) - 2\ln x - 1 - 2 =$$
$$= 2f(x) + 4xf'(x) + x^2f''(x) - 2\ln x - 3 = 0,$$

λόγω της δεδομένης σχέσης.

Επομένως η συνάρτηση g είναι σταθερή, δηλαδή $g(x) = c,$ για κάποιο $c \in \mathbb{R}$, και για κάθε $x > 0$.

Γ2. Αφού, από το ερώτημα Δ1, η συνάρτηση g είναι σταθερή θα υπάρχει $c \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει $g(x) = c$.

Για $x = 1$ έχουμε:

$$g(1) = c \Rightarrow 2f(1) + f'(1) - 1 = c \Rightarrow c = 0 .$$

Επομένως, έχουμε διαδοχικά και ισοδύναμα:

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow 2xf(x) + x^2f'(x) - x(2\,ln\,x + 1) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2xf(x) + x^2f'(x) = x(2\,ln\,x + 1) \Leftrightarrow$$
$$2xf(x) + x^2f'(x) = 2x\,ln\,x + x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow [x^2f(x)]' = [x^2\,ln\,x]' \Leftrightarrow x^2f(x) = x^2\,ln\,x + c_1\ (c_1 \in \mathbb{R})$$

Για $x = 1$ η τελευταΩα σχέση γίνεται:

$$f(1) = 0 + c_1 \Rightarrow c_1 = 0$$

Επομένως:

$$x^2f(x) = x^2\,ln\,x \Leftrightarrow f(x) = ln\,x\,, x > 0$$

Γ3. α). Έστω $A(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής της γραφικής παράστασης C_f της f με την εφαπτομένη της (ε) η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με:

$$f'(x) = \frac{1}{x}, x > 0.$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) στο σημείο Α είναι:

$$(ε): y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - \ln x_0 = \frac{1}{x_0}(x - x_0)\ (1)$$

Αφού η (ε) διέρχεται από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$, λόγω της σχέσης (1), έχουμε:

$$0 - \ln x_0 = \frac{1}{x_0}(0 - x_0) \Leftrightarrow -\ln x_0 = -1 \Leftrightarrow \ln x_0 = 1 \Leftrightarrow x_0 = e$$

Επομένως, η ζητούμενη εξίσωση της (ε) είναι:

$$(ε): y - f(e) = f'(e)(x - e) \Leftrightarrow y - 1 = \frac{1}{e}(x - e) \Leftrightarrow y = \frac{1}{e}x$$

β) Έχουμε:

$$y(t) = (fof)(x(t)) = f(f(x(t))) = \ln(\ln(x(t)), t > 0, \qquad x(t) > 1$$

Η συνάρτηση $y(t)$ είναι παραγωγίσιμη για κάθε $t > 0$ (ως συνθέσεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων για κάθε $t > 0$) με:

$$y'(t) = \frac{1}{\ln(x(t)} \cdot (\ln(x(t))' = \frac{1}{\ln(x(t)} \cdot \frac{1}{x(t)} \cdot x'(t), \qquad t > 0$$

Τη χρονική στιγμή $t = t_0$ sec είναι:

$$t = t_0 \Rightarrow y'(t_0) = \frac{1}{\ln(x(t_o)} \cdot \frac{1}{x(t_0)} \cdot x'(t_0) = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2\ln 2} \text{ cm/sec}$$

Γ4. Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$K(x) = \ln(|f(x)|), \; x \in \left(0, \frac{1}{e}\right).$$

Η $K(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο *διάστημα* $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ (ως συνθέσεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο διάστημα $\left(0, \frac{1}{e}\right)$) με:

$$K'(x) = \frac{1}{x\ln x}, \qquad x \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$$

Η $K'(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο διάστημα $\left(0, \frac{1}{e}\right)$) με:

$$K''(x) = -\frac{(1 + \ln x)}{x^2 \ln^2 x} > 0, \qquad x \in \left(0, \frac{1}{e}\right),$$

$$\textit{αφού για κάθε } x \in \left(0, \frac{1}{e}\right) \textit{ είναι:}$$

$$x < \frac{1}{e} \Leftrightarrow \ln x < \ln\frac{1}{e} \Leftrightarrow \ln x < -1 \Leftrightarrow \ln x + 1 < 0.$$

Άρα η $K'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(0, \frac{1}{e}\right)$, δηλαδή η K είναι κυρτή στο διάστημα $\left(0, \frac{1}{e}\right)$.

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού στα διαστήματα $\left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right]$ και $\left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right]$ αντίστοιχα αφού πληρούνται οι προϋποθέσεις του:

Η συνάρτηση $K(x)$ είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $\left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right]$ και $\left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right]$ (άρα και συνεχής σε αυτά). Επομένως, υπάρχουν αντίστοιχα $\xi_1 \in \left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ και $\xi_2 \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right)$ αντίστοιχα τέτοια, ώστε:

$$K'(\xi_1) = 2\frac{K\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - K(\alpha)}{\beta-\alpha} \quad \text{και} \quad K'(\xi_2) = 2\frac{K(\beta) - K\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta-\alpha}.$$

Έχουμε διαδοχικά:

$$\xi_1 < \xi_2 \Rightarrow K'(\xi_1) < K'(\xi_2) \Rightarrow 2\frac{K\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - K(\alpha)}{\beta-\alpha} < 2\frac{K(\beta) - K\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta-\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - K(\alpha) < K(\beta) - K\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \Rightarrow 2K\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) < K(\alpha) + K(\beta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\,ln\left(\left|f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right|\right) < ln|f(\alpha)| + ln|f(\beta)| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ln\left(\left|f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right|\right)^2 < ln(|f(\alpha)|\cdot|f(\beta)|) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\left|f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right|\right)^2 < |f(\alpha)|\cdot|f(\beta)| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right| < \sqrt{|f(\alpha)|\cdot|f(\beta)|} \Rightarrow \left|f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right| < \sqrt{f(\alpha)\cdot f(\beta)}$$

$(\alpha\varphi o\acute{\upsilon}\ f(\alpha) < 0, f(\beta) < 0, \delta\iota\acute{o}\tau\iota\ \alpha,\beta \in \left(0,\frac{1}{e}\right))$

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. Αφού η f' είναι συνεχής και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$, δηλαδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ή $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως, η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ ή γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, αντίστοιχα (γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$).

Από τη δοσμένη σχέση:

$$f(x) + f(1-x) = 0 \ ,$$

για $x = \frac{1}{2}$ έχουμε:

$$f\left(\tfrac{1}{2}\right) + f\left(1-\tfrac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow 2f\left(\tfrac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow f\left(\tfrac{1}{2}\right) = 0$$

Άρα ρίζα της εξίσωσης $\mathrm{f(x)} = 0$ είναι η $x = \frac{1}{2}$, η οποία είναι μοναδική διότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$, άρα και «1-1» στο $\mathbb{R}$.

Δ2. Για τη συνάρτηση f ισχύουν:

- είναι συνεχής στο $[0,1]$ και
- είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$

Άρα, από το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού, στο διάστημα $[0,1]$ προκύπτει ότι υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(x_0) = \frac{f(1) - f(0)}{1-0} \Leftrightarrow f'(x_0) = f(1) - f(0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0) = f(1) + f(1) \Leftrightarrow f'(x_0) = 2f(1)$$

(διότι για $x = 1$ από την σχέση $f(x) + f(.1 - x) = 0$ έχουμε $f(1) + f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = -f(1)$).

<u>2ος τρόπος:</u> Αποδεικνύεται και με την εφαρμογή του θεωρήματος του Rolle για την συνάρτηση:

$$\mathrm{K(x) = f(x) - 2f(1)x,\ x \in [0,1]}\ ,$$

αφού στο διάστημα $[0,1]$ πληρούνται οι προϋποθέσεις του.

Δ3. Για το σημείο $\mathrm{A(x_1, g(x_1))}$ στο οποίο η g τέμνει τον άξονα $\mathrm{x'x}$ έχουμε:

$$\mathrm{g(x_1) = \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0 \Leftrightarrow f(x_1) = 0 \Leftrightarrow f(x_1) = f\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{2}}\ ,$$

αφού η f είναι συνάρτηση «1-1» στο $\mathbb{R}$.

Άρα το σημείο επαφής είναι το $\mathrm{A}\left(\frac{1}{2}, \mathrm{g}\left(\frac{1}{2}\right)\right)$.

Για να αποδείξουμε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης $\mathrm{C_g}$ της συνάρτησης g , στο σημείο $\mathrm{A}\left(\frac{1}{2}, \mathrm{g}\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ σχηματίζει με τον άξονα $\mathrm{x'x}$ γωνία 45^0 πρέπει να αποδείξουμε ότι η g είναι παραγωγίσιμη[2] στο $\mathrm{x_0} = \frac{1}{2}$ με $\mathrm{g'}\left(\frac{1}{2}\right) = 1 = \varepsilon\varphi 45^o$. Έχουμε:

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{g(x) - g\left(\frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}} = \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{\frac{f(x)}{f'(x)} - 0}{x - \frac{1}{2}} = \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{f(x)}{f'(x)\left(x - \frac{1}{2}\right)} = \lim_{x\to\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{f'(x)} \frac{f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}}\right] =$$

$$= \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{1}{f'(x)} \cdot \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}} = \frac{1}{f'\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

Αφού:

$$\mathrm{\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'\left(\frac{1}{2}\right)}}\left(f'\ \textit{συνεχής στο}\ \frac{1}{2}\right) \text{ και } \mathrm{f'\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}}}, \text{ δηλαδή:}$$

$$\mathrm{g'\left(\frac{1}{2}\right) = 1}$$

Επομένως, $\mathrm{g'\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega = 1 \Leftrightarrow \omega = 45^0}$

Δ4 i) Έχουμε ότι:

$$\mathrm{f(x) + f(1 - x) = 0 \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 f(1 - x)dx = 0 \Rightarrow I_1 + I_2 = 0\ (1)}$$

, όπου $I_1 = \int_0^1 f(x)dx$ και $I_2 = \int_0^1 f(1 - x)dx$.

[2] Η παραγώγιση της συνάρτησης g γενικά από τον τύπο της δεν είναι δυνατή, αφού αυτό απαιτεί η f να είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, το οποίο όμως δεν είναι δεδομένο αλλά ούτε προκύπτει ως συνέπεια των δεδομένων.

Για το ολοκλήρωμα I_2 έχουμε:

Θέτουμε:

$$1 - x = u \Leftrightarrow x = 1 - u$$
$$dx = -du$$
$$x = 1 \Leftrightarrow u = 0$$
$$x = 0 \Leftrightarrow u = 1 \ ,$$

οπότε έχουμε:

$$I_2 = \int_0^1 f(1-x)dx = -\int_1^0 f(u)du = \int_0^1 f(u)du = \int_0^1 f(x)dx = I_1$$

Επομένως , από τη σχέση (1), έχουμε:

$$I_1 + I_2 = 0 \Leftrightarrow 2I_1 = 0 \Leftrightarrow I_1 = 0 \Leftrightarrow I_1 = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx = 0$$

ii) Είναι:

$$\int_0^1 f'(x)dx = f(1) - f(0) = 1 \ (I).$$

Από τη σχέση:

$$f(x) + f(1-x) = 0,$$

για $x = 1$ έχουμε:

$$f(0) + f(1) = 0 \ (II)$$

Από τις σχέσεις (Ι) και (ΙΙ), προσθέτοντας κατά μέλη, έχουμε:

$$f(0) = -\frac{1}{2} \text{ και } f(1) = \frac{1}{2}.$$

Το ζητούμενο εμβαδόν του χωρίου Ω είναι:

$$E(\Omega) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f^{-1}(x)|\, dx \ .$$

Θέτουμε:

$$f^{-1}(x) = u \Leftrightarrow x = f(u)$$
$$dx = f'(u)du$$
$$x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow f(u) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow f(u) = f(0) \Leftrightarrow u = 0$$
$$x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow f(u) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow f(u) = f(1) \Leftrightarrow u = 1 \quad (\text{αφού η } f \text{ είναι «1-1»})$$

Επομένως, έχουμε διαδοχικά:

$$E(\Omega) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f^{-1}(x)|\, dx = \int_0^1 |u| \cdot f'(u)du = \int_0^1 u\, f'(u)du =$$
$$= [uf(u)]_0^1 - \int_0^1 f(u)du = f(1) - 0 = \frac{1}{2}$$

Δηλαδή: $E(\Omega) = \frac{1}{2}$ τ.μ.

Δ5. i) Θέτουμε ξανά:

$$\mathrm{f}^{-1}(\mathrm{x})=\mathrm{u} \Leftrightarrow \mathrm{x}=\mathrm{f}(\mathrm{u})$$

$$\mathrm{dx}=\mathrm{f}'(\mathrm{u})\mathrm{du}$$

$$\mathrm{x}=0 \Leftrightarrow \mathrm{u}=\mathrm{f}^{-1}(0) \Leftrightarrow \mathrm{u}=\frac{1}{2} \text{ (αφού } \mathrm{f}\left(\frac{1}{2}\right)=0)$$

$$\mathrm{x}=\mathrm{f}(\lambda) \Leftrightarrow \mathrm{u}=\mathrm{f}^{-1}(\mathrm{f}(\lambda)) \Leftrightarrow \mathrm{u}=\lambda$$

και έχουμε:

$$\mathrm{K}(\lambda)=\int_{\frac{1}{2}}^{\lambda}\mathrm{f}(\mathrm{x})\mathrm{dx}+\int_{0}^{\mathrm{f}(\lambda)}\mathrm{f}^{-1}(\mathrm{x})\mathrm{dx}=\int_{\frac{1}{2}}^{\lambda}\mathrm{f}(\mathrm{x})\mathrm{dx}+\int_{\frac{1}{2}}^{\lambda}\mathrm{uf}'(\mathrm{u})\mathrm{du}=$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{\lambda}\mathrm{f}(\mathrm{x})\mathrm{dx}+[\mathrm{uf}(\mathrm{u})]_{\frac{1}{2}}^{\lambda}-\int_{\frac{1}{2}}^{\lambda}\mathrm{f}(\mathrm{u})\mathrm{du}=\lambda\mathrm{f}(\lambda)-\frac{1}{2}\mathrm{f}\left(\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\lambda\mathrm{f}(\lambda)-\frac{1}{2}\mathrm{f}\left(\frac{1}{2}\right)\lambda\mathrm{f}(\lambda)$$

ii) Με επαναλαμβανόμενη χρήση του κανόνα του de l' Hospital (αφού ισχύουν οι προϋποθέσεις του και έχουμε απροσδιόριστη μορφή) έχουμε διαδοχικά:

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{K(\lambda)\cdot\ln\lambda}{f(\lambda)\cdot e^{\lambda}}=\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\lambda f(\lambda)\cdot\ln\lambda}{f(\lambda)\cdot e^{\lambda}}=\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\lambda\cdot\ln\lambda}{e^{\lambda}}=\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1+\ln\lambda}{e^{\lambda}}=\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\frac{1}{\lambda}}{e^{\lambda}}=$$

$$=\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{\lambda e^{\lambda}}=0$$

Επιστημονική Επιμέλεια λύσεων:

Καραγιάννης Ιωάννης, Σύμβουλος Εκπαίδευσης ΠΕ03 Μαθηματικών Κυκλάδων & Α΄Αθήνας

Καραγιάννης Βασίλειος, Μαθηματικός, Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης