ΟΔΗΓΟΣ ΒΑΘΜΟΛΟΓΗΣΗΣ
ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ & ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ: 2025-2026
ΜΑΡΤΙΟΣ 2026

Α) ΓΕΝΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ

- ✓ Οποιαδήποτε λύση/απάντηση ερωτήματος που είναι επιστημονικά τεκμηριωμένη, με βάση την διδακτέα/εξεταστέα ύλη καθώς και τις οδηγίες διδασκαλίας και διαχείρισης της ύλης του Ι.Ε.Π. του τρέχοντος σχολικού έτους (καθώς και σχολική ύλη προγενέστερων τάξεων) είναι αποδεκτή.
- ✓ Η ενδεχόμενη χρήση προτάσεων/θεωρημάτων/πορισμάτων που δεν αναφέρονται στη διδακτέα ύλη αλλά ούτε στις οδηγίες διδασκαλίας και διαχείρισης της ύλης του Ι.Ε.Π. ή σε σχολική ύλη προηγούμενων τάξεων γίνεται αποδεκτή μόνο όταν αποδεικνύονται.
- ✓ Οι λύσεις των ασκήσεων/υποερωτημάτων υποδιαιρούνται στα βήματα λύσης και κάθε βήμα μοριοδοτείται αναλογικά, σε σχέση με το σύνολο των μονάδων που αντιστοιχεί στο υποερώτημα και χωριστά.
- ✓ Μοριοδοτείται αναλογικά και το σκεπτικό μιας λύσης παράλληλα με το υπολογιστικό μέρος.
- ✓ Οποιαδήποτε εναλλακτική λύση υποερωτήματος, διαφορετική από την ενδεικτική λύση που δόθηκε, μοριοδοτείται εφόσον τα βήματα της προτεινόμενης λύσης είναι επιστημονικά ορθά και τεκμηριωμένα.

Β) ΜΟΡΙΟΔΟΤΗΣΗ ΘΕΜΑΤΩΝ/ΥΠΟΕΡΩΡΗΤΗΜΑΤΩΝ

<table>
<tr><th>ΘΕΜΑ</th><th>ΛΥΣΗ</th><th>ΜΟΝ.</th></tr>
<tr><td>Α</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Α1</td><td>Η παράγωγος της f μπορεί να είναι η Τ, αφού η f είναι παραβολή της μορφής $f(x) = \alpha x^2 + \beta$ της οποίας η παράγωγος είναι της μορφής $f'(x)=2\alpha x$, δηλαδή ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.<hr>Η παράγωγος της g μπορεί είναι η Η, αφού η g δεν είναι συνεχής στο σημείο x=0, άρα δεν θα είναι και παραγωγίσιμη στο x=0, συνθήκη που ικανοποιείται μόνο από την γραφική παράσταση Η.</td><td>2

2</td></tr>
<tr><td>Α2</td><td>Διατύπωση<hr>Απόδειξη<hr>Αντίστροφο ή όχι<hr>Δικαιολόγηση</td><td>2
4
1
2</td></tr>
<tr><td>Α3.</td><td>α. Λάθος β. Λάθος γ. Λάθος δ. Σωστό ε. Λάθος</td><td>5x2=10</td></tr>
<tr><td>Α4.</td><td>Η πρόταση συμπληρώνεται ορθά από το (γ).<hr>Αποτελεί ουσιαστικά το συμπέρασμα του Θεωρήματος του Rolle, αφού η f είναι και συνεχής στο [α, β] (διότι είναι παραγωγίσιμη σε αυτό) και προφανώς για τον ίδιο λόγο είναι και παραγωγίσιμη στο (α, β).
Επομένως υπάρχει, ένα τουλάχιστον, ξ στο (α, β), τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$, δηλαδή υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f'(x) = 0$.</td><td>1
1</td></tr>
<tr><td>ΘΕΜΑ Β</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Β1</td><td>Ο πίνακας προσήμου της f΄ (μονοτονίας της f) είναι ο επόμενος:
<table>
<tr><th>x</th><th>-4   -3</th><th>-3   -1/2</th><th>-1/2   2</th><th>2   3</th></tr>
<tr><td>f΄(x)</td><td>–</td><td>+</td><td>–</td><td>+</td></tr>
<tr><td>f(x)</td><td>↘</td><td>↗</td><td>↘</td><td>↗</td></tr>
</table>
Μονοτονία της f:
Στο διάστημα $[-4, -3]$ είναι γνησίως φθίνουσα.</td><td>2
2</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
Στο διάστημα $(-3,-\frac{1}{2}]$ είναι γνησίως αύξουσα.
Στο διάστημα $(-\frac{1}{2}, 2]$ είναι γνησίως φθίνουσα.
Στο διάστημα $(2, 3]$ είναι γνησίως αύξουσα.
<hr>
Στο σημείο $x_1 = -3$ έχει τοπικό ελάχιστο , το $f(-3)$.
Στο σημείο $x_3 = 2$ έχει τοπικό ελάχιστο , το $f(2)$.
Στο σημείο $x_2 = -\frac{1}{2}$, έχει τοπικό μέγιστο, το $f\left(-\frac{1}{2}\right)$, το οποίο είναι και ολικό μέγιστο της f στο $[-4, 3]$.
</td>
<td>2</td>
</tr>
<tr>
<td>Β2</td>
<td>
Ο πίνακας[1] για τα κοίλα της συνάρτησης f είναι ο επόμενος:
-4 -2 1 3
<table>
<tr><td>x</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>f΄(x)</td><td>↗</td><td>↘</td><td>↗</td></tr>
<tr><td>f(x)</td><td>∪</td><td>∩</td><td>∪</td></tr>
</table>
<hr>
Στο διάστημα $[-4,-2]$ η f στρέφει τα κοίλα άνω (είναι κυρτή).
Στο διάστημα $(-2, 1]$ η f στρέφει τα κοίλα κάτω (είναι κοίλη).
Στο διάστημα $(1, 3]$ η f στρέφει τα κοίλα άνω (είναι κυρτή).
Τα σημεία $K(-2, f(-2))$ και $\Lambda(1, f(1))$ είναι σημεία καμπής της f.
</td>
<td>4

2</td>
</tr>
<tr>
<td>Β3</td>
<td>
Αφού $-\frac{1}{2} < \frac{3}{2} < 2$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[-\frac{1}{2,}, 2\right]$ έχουμε: $f\left(-\frac{1}{2}\right) > f\left(\frac{3}{2}\right) > f(2)$ ή
$$f(2) \leq f\left(\frac{3}{2}\right) \leq f\left(-\frac{1}{2}\right)$$
η σε φθίνουσα σειρά: $f\left(-\frac{1}{2}\right), f\left(\frac{3}{2}\right), f(2)$.
</td>
<td>6</td>
</tr>
<tr>
<td>Β4</td>
<td>Αφού η f στο διάστημα $[1, 3]$ είναι κυρτή, η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο της $x_0 \in [1,3]$ (άρα και στο σημείο</td>
<td>1</td>
</tr>
</table>

[1] Στον πίνακα για την κυρτότητα δεν μπορούμε να συμπεριλάβουμε την f΄΄ (x), αφού δεν γνωρίζουμε αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της.

	$x_0 = \frac{3}{2}$) θα βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f (και ειδικά στο σημείο επαφής , στο $A\left(\frac{3}{2}, f\left(\frac{3}{2}\right)\right)$, θα ισχύει η ισότητα).	
	Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A\left(\frac{3}{2}, f\left(\frac{3}{2}\right)\right)$ είναι: $$y = f'\left(\frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right)$$	**1**
	Δηλαδή για κάθε $x \in [1,3]$ θα ισχύει: $$f(x) \geq f'\left(\frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right)$$	**1**
	Στην τελευταία σχέση, παίρνοντας και στα δύο μέλη ορισμένο ολοκλήρωμα, με άκρα τα 1 και 3, έχουμε: $$\int_1^3 f(x)dx \geq \int_1^3 \left[f'\left(\frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right)\right] dx$$	**2**
	και αφού $E = \int_1^3 \lvert f(x) \rvert dx = \int_1^3 f(x)dx$ αφού: $f(x) \geq f(2) = 1 > 0$ $(\text{το } f(2) \text{ είναι ολικό ελάχιστο})$ έχουμε: $$E \geq f'\left(\frac{3}{2}\right)\left[\frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}x\right]_1^3 + f\left(\frac{3}{2}\right)(3-1)$$ $$E \geq f'\left(-\frac{3}{2}\right) \cdot 1 + 2f\left(\frac{3}{2}\right)$$ ή τελικά: $$E \geq f'\left(\frac{3}{2}\right) + 2f\left(\frac{3}{2}\right)$$	**2**
ΘΕΜΑ Γ		
Γ1	Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, +\infty)$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο διάστημα $(0, +\infty)$) με:	**1**
	$$g'(x) = 2f(x) + 2xf'(x) + 2xf'(x) + x^2 f''(x) - 2\ln x - 1 - 2 =$$	**3**

	$= 2f(x) + 4xf'(x) + x^2f''(x) - 2\ln x - 3 = 0,$ λόγω της δεδομένης σχέσης.	
	Επομένως η συνάρτηση g είναι σταθερή, δηλαδή $g(x) = c,$ για κάποιο $c \in \mathbb{R}$, και για κάθε $x > 0$.	**1**
Γ2	Αφού, από το ερώτημα Δ1, η συνάρτηση g είναι σταθερή θα υπάρχει $c \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει $g(x) = c$. Για $x = 1$ έχουμε: $$g(1) = c \Rightarrow 2f(1) + f'(1) - 1 = c \Rightarrow c = 0 .$$	**1**
	Επομένως, έχουμε διαδοχικά και ισοδύναμα: $g(x) = 0 \Leftrightarrow 2xf(x) + x^2f'(x) - x(2\ln x + 1) = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2xf(x) + x^2f'(x) = x(2\ln x + 1) \Leftrightarrow$ $2xf(x) + x^2f'(x) = 2x\ln x + x \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow [x^2f(x)]' = [x^2\ln x]' \Leftrightarrow x^2f(x) = x^2\ln x + c_1 \ (c_1 \in \mathbb{R})$	**3**
	Για $x = 1$ η τελευταΩα σχέση γίνεται: $$f(1) = 0 + c_1 \Rightarrow c_1 = 0$$ Επομένως: $$x^2f(x) = x^2\ln x \Leftrightarrow f(x) = \ln x\,, x > 0$$	**1**
Γ3	**α).** Έστω $A(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής της γραφικής παράστασης C_f της f με την εφαπτομένη της (ε) η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με: $$f'(x) = \frac{1}{x}, x > 0.$$ Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) στο σημείο A είναι: $$(\varepsilon): y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - \ln x_0 = \frac{1}{x_0}(x - x_0) \ (1)$$	**1** **1**
	Αφού η (ε) διέρχεται από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$, λόγω της σχέσης (1), έχουμε: $$0 - \ln x_0 = \frac{1}{x_0}(0 - x_0) \Leftrightarrow -\ln x_0 = -1 \Leftrightarrow \ln x_0 = 1 \Leftrightarrow x_0 = e$$	

	Επομένως, η ζητούμενη εξίσωση της (ε) είναι: $(\varepsilon)\colon \mathrm{y} - \mathrm{f(e)} = \mathrm{f'(e)(x - e)} \Leftrightarrow \mathrm{y} - 1 = \frac{1}{\mathrm{e}}(\mathrm{x} - \mathrm{e}) \Leftrightarrow \mathrm{y} = \frac{1}{\mathrm{e}}\mathrm{x}$	**2**
Γ3	**β)** Έχουμε: $\mathrm{y(t)} = (\mathrm{fof})(\mathrm{x(t)}) = \mathrm{f(f(x(t)))} = \ln(\ln(\mathrm{x(t)})\, , \mathrm{t} > 0, \qquad \mathrm{x(t)} > 1$ Η συνάρτηση $\mathrm{y(t)}$ είναι παραγωγίσιμη για κάθε $t > 0$ (ως συνθέσεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων για κάθε $\mathrm{t} > 0$) με: $\mathrm{y}'(\mathrm{t}) = \frac{1}{\ln(\mathrm{x(t)}} \cdot (\ln(\mathrm{x(t)})' = \frac{1}{\ln(\mathrm{x(t)}} \cdot \frac{1}{\mathrm{x(t)}} \cdot \mathrm{x}'(\mathrm{t}), \qquad \mathrm{t} > 0$	**4**
	Τη χρονική στιγμή $\mathrm{t} = \mathrm{t}_0$ sec είναι: $t = \mathrm{t}_0 \Rightarrow \mathrm{y}'(\mathrm{t}_0) = \frac{1}{\ln(\mathrm{x}(\mathrm{t}_o)} \cdot \frac{1}{\mathrm{x}(\mathrm{t}_0)} \cdot \mathrm{x}'(\mathrm{t}_0) = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2\ln 2}$ cm/sec	**2**
Γ4	Θεωρούμε τη συνάρτηση: $\mathrm{K(x)} = \ln(\lvert \mathrm{f(x)} \rvert)\, ,\ \mathrm{x} \in \left(0,\ \frac{1}{\mathrm{e}}\right).$ Η $\mathrm{K(x)}$ είναι παραγωγίσιμη στο *διάστημα* $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ (ως συνθέσεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο διάστημα $\left(0, \frac{1}{e}\right)$) με: $\mathrm{K}'(\mathrm{x}) = \frac{1}{\mathrm{xlnx}}, \qquad \mathrm{x} \in \left(0, \frac{1}{\mathrm{e}}\right)$	**0,5**
	Η $\mathrm{K}'(\mathrm{x})$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο διάστημα $\left(0, \frac{1}{e}\right)$) με: $\mathrm{K}''(\mathrm{x}) = -\frac{(1 + \mathrm{lnx})}{\mathrm{x}^2\mathrm{ln}^2\mathrm{x}} > 0\, , \qquad \mathrm{x} \in \left(0, \frac{1}{\mathrm{e}}\right),$ $\text{αφού για κάθε } x \in \left(0, \frac{1}{e}\right) \text{ είναι:}$ $\mathrm{x} < \frac{1}{\mathrm{e}} \Leftrightarrow \ln \mathrm{x} < \ln \frac{1}{\mathrm{e}} \Leftrightarrow \ln \mathrm{x} < -1 \Leftrightarrow \ln \mathrm{x} + 1 < 0\ .$	**1**
		0,5

<table>
<tr><td></td><td>Άρα η $K'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(0,\frac{1}{e}\right)$, δηλαδή η K είναι κυρτή στο διάστημα $\left(0,\frac{1}{e}\right)$.
Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού στα διαστήματα $\left[\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right]$ και $\left[\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right]$ αντίστοιχα αφού πληρούνται οι προϋποθέσεις του:
Η συνάρτηση K(x) είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $\left[\alpha,\ \frac{\alpha+\beta}{2}\right]$ και $\left[\frac{\alpha+\beta}{2},\ \beta\right]$ (άρα και συνεχής σε αυτά). Επομένως, υπάρχουν αντίστοιχα $\xi_1 \in \left(\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ και $\xi_2 \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right)$ αντίστοιχα τέτοια, ώστε:
$$K'(\xi_1)=2\frac{K\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-K(\alpha)}{\beta-\alpha} \quad \text{και} \quad K'(\xi_2)=2\frac{K(\beta)-K\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta-\alpha}.$$<hr>Έχουμε διαδοχικά:
$$\xi_1<\xi_2 \Rightarrow K'(\xi_1)<K'(\xi_2) \Rightarrow 2\frac{K\left(\frac{a+\beta}{2}\right)-K(a)}{\beta-\alpha} < 2\frac{K(\beta)-K\left(\frac{a+\beta}{2}\right)}{\beta-\alpha} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow K\left(\frac{a+\beta}{2}\right)-K(a)<K(\beta)-K\left(\frac{a+\beta}{2}\right) \Rightarrow 2K\left(\frac{a+\beta}{2}\right) < K(a)+K(\beta) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2\,ln\left(\left|f\left(\frac{a+\beta}{2}\right)\right|\right)<ln|f(a)|+ln|f(\beta)| \Rightarrow$$
$$\Rightarrow ln\left(\left|f\left(\frac{a+\beta}{2}\right)\right|\right)^2<ln(|f(a)|\cdot|f(\beta)|) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(\left|f\left(\frac{a+\beta}{2}\right)\right|\right)^2<|f(a)|\cdot|f(\beta)| \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left|f\left(\frac{a+\beta}{2}\right)\right|<\sqrt{|f(a)|\cdot|f(\beta)|} \Rightarrow \left|f\left(\frac{a+\beta}{2}\right)\right|<\sqrt{f(a)\cdot f(\beta)}$$
$$(\alpha\varphi o\acute{\upsilon}\ f(a)<0, f(\beta)<0, \delta\iota\acute{o}\tau\iota\ \alpha,\beta\in\left(0,\frac{1}{e}\right))$$</td><td>3</td></tr>
<tr><td>ΘΕΜΑ Δ</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Δ1</td><td>Αφού η f' είναι συνεχής και $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$, δηλαδή $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ή $f'(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.</td><td>2</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>Επομένως, η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ ή γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, αντίστοιχα (γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$).
Από τη δοσμένη σχέση:
$$f(x)+f(1-x)=0\ ,$$
για $x=\frac{1}{2}$ έχουμε:
$$f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(1-\frac{1}{2}\right)=0 \Leftrightarrow 2f\left(\frac{1}{2}\right)=0 \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=0$$
Άρα ρίζα της εξίσωσης $\mathrm{f(x)}=0$ είναι η $x=\frac{1}{2}$, η οποία είναι μοναδική διότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$, άρα και «1-1» στο $\mathbb{R}$.</td><td>3</td></tr>
<tr><td>Δ2</td><td>. Για τη συνάρτηση f ισχύουν:
• είναι συνεχής στο $[0,1]$ και
• είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$
Άρα, από το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού, στο διάστημα $[0,1]$ προκύπτει ότι υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε:</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td>$$f'(x_0)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0} \Leftrightarrow f'(x_0)=f(1)-f(0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f'(x_0)=f(1)+f(1) \Leftrightarrow f'(x_0)=2f(1)$$
(διότι για $x=1$ από την σχέση $f(x)+f(.1-x)=0$ έχουμε $f(1)+f(0)=0 \Leftrightarrow f(0)=-f(1)$).</td><td>2</td></tr>
<tr><td></td><td><u>2ος τρόπος:</u> Αποδεικνύεται και με την εφαρμογή του θεωρήματος του Rolle για την συνάρτηση:
$$\mathrm{K(x)}=\mathrm{f(x)}-2\mathrm{f(1)x},\ \ \mathrm{x}\in[0,1]\ ,$$
αφού στο διάστημα $[0,1]$ πληρούνται οι προϋποθέσεις του.</td><td></td></tr>
<tr><td>Δ3</td><td>Για το σημείο $\mathrm{A(x_1, g(x_1))}$ στο οποίο η g τέμνει τον άξονα x΄x έχουμε:
$$\mathrm{g(x_1)}=\frac{\mathrm{f(x_1)}}{\mathrm{f'(x_1)}}=0 \Leftrightarrow \mathrm{f(x_1)}=0 \Leftrightarrow \mathrm{f(x_1)}=\mathrm{f}\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \mathrm{x_1}=\frac{1}{2}\ ,$$
αφού η f είναι συνάρτηση «1-1» στο $\mathbb{R}$.
Άρα το σημείο επαφής είναι το $\mathrm{A}\left(\frac{1}{2},\mathrm{g}\left(\frac{1}{2}\right)\right)$.</td><td>0,5</td></tr>
</table>

	Για να αποδείξουμε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_g της συνάρτησης g , στο σημείο $A\left(\frac{1}{2}, g\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45^0 πρέπει να αποδείξουμε ότι η g είναι παραγωγίσιμη[2] στο $x_0=\frac{1}{2}$ με $g'\left(\frac{1}{2}\right)=1=\varepsilon\varphi 45^o$. Έχουμε:	**0,5**
	$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{g(x)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{\frac{f(x)}{f'(x)}-0}{x-\frac{1}{2}}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{f(x)}{f'(x)\left(x-\frac{1}{2}\right)}=$$ $$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{f'(x)}\frac{f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}}\right]=$$ $$=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{1}{f'(x)}\cdot\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}}=\frac{1}{f'\left(\frac{1}{2}\right)}\cdot f'\left(\frac{1}{2}\right)=1$$ Αφού: $$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{f'\left(\frac{1}{2}\right)}\left(f'\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\ \frac{1}{2}\right)\ \text{και}\ f'\left(\frac{1}{2}\right)=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}},$$ δηλαδή: $g'\left(\frac{1}{2}\right)=1$ Επομένως, $g'\left(\frac{1}{2}\right)=1\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega=1\Leftrightarrow\omega=45^0$	**3**
Δ4	**i)** Έχουμε ότι: $$f(x)+f(1-x)=0\Rightarrow\int_0^1 f(x)dx+\int_0^1 f(1-x)dx=0\Rightarrow I_1+I_2=0\ (1)$$, όπου $I_1=\int_0^1 f(x)dx$ και $I_2=\int_0^1 f(1-x)dx$.	**1**
	Για το ολοκλήρωμα I_2 έχουμε: Θέτουμε: $1-x=u\Leftrightarrow x=1-u$ $dx=-du$ $x=1\Leftrightarrow u=0$	**2**

[2] Η παραγώγιση της συνάρτησης g γενικά από τον τύπο της δεν είναι δυνατή, αφού αυτό απαιτεί η f να είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, το οποίο όμως δεν είναι δεδομένο αλλά ούτε προκύπτει ως συνέπεια των δεδομένων.

$$x = 0 \Leftrightarrow u = 1 \ ,$$

οπότε έχουμε:

$$I_2 = \int_0^1 f(1-x)dx = -\int_1^0 f(u)du = \int_0^1 f(u)du = \int_0^1 f(x)dx = I_1$$

Επομένως , από τη σχέση (1), έχουμε:

$$I_1 + I_2 = 0 \Leftrightarrow 2I_1 = 0 \Leftrightarrow I_1 = 0 \Leftrightarrow I_1 = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx = 0$$

---

ii) Είναι:

$$\int_0^1 f'(x)dx = f(1) - f(0) = 1 \ (I).$$

Από τη σχέση:

$$f(x) + f(1-x) = 0,$$

για $x = 1$ έχουμε:

$$f(0) + f(1) = 0 \ (II)$$

1

Από τις σχέσεις (I) και (II), προσθέτοντας κατά μέλη, έχουμε:

$$f(0) = -\frac{1}{2} \text{ και } f(1) = \frac{1}{2}.$$

Το ζητούμενο εμβαδόν του χωρίου Ω είναι:

$$E(\Omega) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f^{-1}(x)| \, dx \, .$$

0,5

Θέτουμε:

$$f^{-1}(x) = u \Leftrightarrow x = f(u)$$

$$dx = f'(u)du$$

$$x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow f(u) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow f(u) = f(0) \Leftrightarrow u = 0$$

$x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow f(u) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow f(u) = f(1) \Leftrightarrow u = 1$ (αφού η f είναι «1-1»)

2

Επομένως, έχουμε διαδοχικά:

0,5

<table>
<tr><td></td><td>$$E(\Omega) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f^{-1}(x)|\, dx = \int_0^1 |u| \cdot f'(u)du = \int_0^1 u\, f'(u)du =$$
$$= [uf(u)]_0^1 - \int_0^1 f(u)du = f(1) - 0 = \frac{1}{2}$$
Δηλαδή: $E(\Omega) = \frac{1}{2}$ τ.μ.</td><td></td></tr>
<tr><td>Δ5</td><td>i) Θέτουμε ξανά:
$$f^{-1}(x) = u \Leftrightarrow x = f(u)$$
$$dx = f'(u)du$$
$$x = 0 \Leftrightarrow u = f^{-1}(0) \Leftrightarrow u = \frac{1}{2} \text{ (αφού } f\left(\frac{1}{2}\right) = 0)$$
$$x = f(\lambda) \Leftrightarrow u = f^{-1}(f(\lambda)) \Leftrightarrow u = \lambda$$</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td>και έχουμε:
$$K(\lambda) = \int_{\frac{1}{2}}^{\lambda} f(x)dx + \int_0^{f(\lambda)} f^{-1}(x)dx = \int_{\frac{1}{2}}^{\lambda} f(x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\lambda} uf'(u)du =$$
$$= \int_{\frac{1}{2}}^{\lambda} f(x)dx + [uf(u)]_{\frac{1}{2}}^{\lambda} - \int_{\frac{1}{2}}^{\lambda} f(u)du = \lambda f(\lambda) - \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2}\right) =$$
$$= \lambda f(\lambda) - \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2}\right) \lambda f(\lambda)$$</td><td>3</td></tr>
<tr><td></td><td>ii) Με επαναλαμβανόμενη χρήση του κανόνα του de l’ Hospital (αφού ισχύουν οι προϋποθέσεις του και έχουμε απροσδιόριστη μορφή) έχουμε διαδοχικά:
$$\lim_{\lambda\to+\infty} \frac{K(\lambda)\cdot \ln\lambda}{f(\lambda)\cdot e^{\lambda}} = \lim_{\lambda\to+\infty} \frac{\lambda f(\lambda)\cdot \ln\lambda}{f(\lambda)\cdot e^{\lambda}} = \lim_{\lambda\to+\infty} \frac{\lambda\cdot \ln\lambda}{e^{\lambda}} = \lim_{\lambda\to+\infty} \frac{1+\ln\lambda}{e^{\lambda}} =$$
$$\lim_{\lambda\to+\infty} \frac{\frac{1}{\lambda}}{e^{\lambda}} == \lim_{\lambda\to+\infty} \frac{1}{\lambda e^{\lambda}} = 0$$</td><td>3</td></tr>
</table>

ΘΕΜΑ Α	ΜΟΡΙΑ	ΘΕΜΑ Β	ΜΟΡΙΑ	ΘΕΜΑ Γ	ΜΟΡΙΑ	ΘΕΜΑ Δ	ΜΟΡΙΑ
Α1		Β1		Γ1		Δ1	
Α2		Β2		Γ2		Δ2	
Α3		Β3		Γ3		Δ3	
Α4		Β4		Γ4		Δ4	
ΣΥΝΟΛΟ ΜΟΝΑΔΩΝ		ΣΥΝΟΛΟ ΜΟΝΑΔΩΝ		ΣΥΝΟΛΟ ΜΟΝΑΔΩΝ		Δ5	

						ΣΥΝΟΛΟ ΜΟΝΑΔΩΝ	
ΓΕΝΙΚΟ ΣΥΝΟΛΟ ΜΟΝΑΔΩΝ							

Καραγιάννης Ιωάννης
Σύμβουλος Εκπαίδευσης Μαθηματικών Κυκλάδων & Α΄ Αθήνας