

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ, ΠΕΛΛΑΣ, ΚΥΚΛΑΔΩΝ
ΔΕΥΤΕΡΑ 27 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2026
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: 4

Θέμα Α

A1. Να αποδείξετε ότι:

”Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.”

Μονάδες 7

A2. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat.

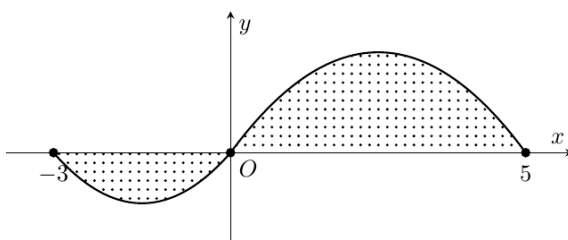
Μονάδες 4

A3. Έστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A . Πότε θα λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i. Το εμβαδόν E του γραμμοσκιασμένου χωρίου του παρακάτω σχήματος



είναι $E = -\int_{-3}^0 f(x)dx + \int_0^5 f(x)dx$.

ii. Ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin x}{x} = 1$.

iii. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο καμπής ”διαπερνά” την καμπύλη.

iv. Ισχύει ότι $(a^x)' = x \cdot a^{x-1}$, $a > 0$.

v. $\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b + \int_a^b f(x)g'(x)dx$.

Μονάδες 10

Θέμα Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $x \neq -1$ και $g(x) = \frac{1}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$.

B1. Να ορίσετε τη συνάρτηση $h = f \circ g$.

Μονάδες 5

B2. Αν $h(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$, $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η h είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφή της.

Μονάδες 8

B3. Αν $h^{-1}(x) = \ln \frac{x}{1-x}$, $x \in (0, 1)$, να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της h^{-1} .

Μονάδες 6

B4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) \cdot \eta\mu g(x)]$.

Μονάδες 6

Θέμα Γ

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $xf'(x) + 1 = -f(x) - \ln x$ για κάθε $x > 0$,
- $f(1) = 1$

και συνάρτηση $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = x(f(x) + \ln x)$ για κάθε $x > 0$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι:

i. η g είναι σταθερή συνάρτηση στο $(0, +\infty)$,

Μονάδες 4

ii. ο τύπος της f είναι $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Μονάδες 2

Γ2. Να αποδείξετε ότι:

i. η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$,

Μονάδες 2

ii. η εξίσωση $x^x = e$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(1, e)$.

Μονάδες 3

Αν x_0 είναι η ρίζα του ερωτήματος Γ2ii,

Γ3. i. να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$.

Μονάδες 5

ii. Να λύσετε την εξίσωση

$$x_0 \cdot (x_0 f(x) + x - x_0) = -x + x_0$$

Μονάδες 4

Γ4. Ένα κινητό $\Sigma(x, f(x))$ ξεκινά από το σημείο $M(x_0, f(x_0))$ και κινείται στη γραφική παράσταση της f , με την τετμημένη του να ελλατώνεται με ρυθμό 2cm/s . Αν E το εμβαδόν του τριγώνου $ON\Sigma$ που ορίζουν τα σημεία $O(0, 0)$, $N(x, 0)$ και $\Sigma(x, f(x))$ με $0 < x < x_0$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού E τη χρονική στιγμή που το Σ διέρχεται από το σημείο $A(1, 1)$.

Μονάδες 5

Θέμα Δ

Δίνεται συνάρτηση f με

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^2+\alpha}, & x \leq 0, \\ x^2 \cdot e^{1-x} + 1, & x > 0. \end{cases}$$

για την οποία ισχύει $f(0) \cdot \ln x \leq x - 1$, για κάθε $x > 0$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(0) = 1$ και $\alpha = 0$.

Μονάδες 4

Δ2. i. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 4

ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in (1, 3)$ ισχύει η ανίσωση :

$$f(\ln(x - 1)) \leq f(x - 2)$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

Μονάδες 6

Δ3. Αν F είναι μία παράγουσα της f στο \mathbb{R} , να αποδείξετε ότι

$$|F(\beta) - F(\alpha)| \leq \left(\frac{4}{e} + 1\right) \cdot |\beta - \alpha|$$

, για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 4

Δ4. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in [-1, 0]$ ισχύει: $e^{-x^2} \geq 1 - x^2$. Στη συνέχεια, αν E το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα x και τις κατακόρυφες ευθείες $x = -1$ και $x = 1$, να αποδείξετε ότι :

$$E > 2e - \frac{10}{3}$$

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους / τις εξεταζόμενες)

- 1. Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
- 2.** Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
- 3.** Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
- 4.** Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
- 5.** Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
- 6.** Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10:00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ