

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΔΕΥΤΕΡΑ, 30 ΜΑΡΤΙΟΥ 2026

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

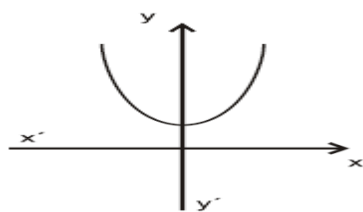
ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ

ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

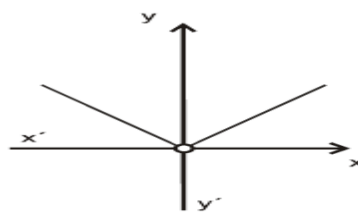
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΕΞΙ (6)

Θ Ε Μ Α Α

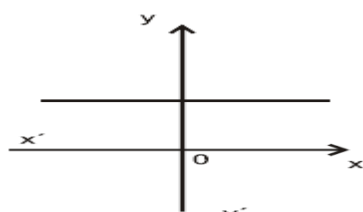
A1. Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f , g , F , G , H , T .



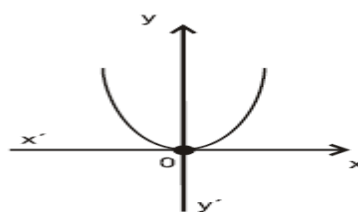
(f)



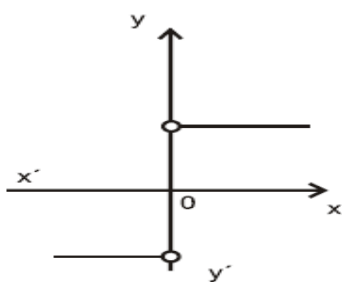
(g)



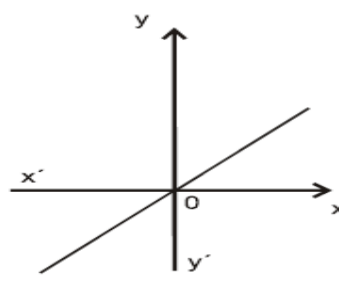
(F)



(G)



(H)



(T)

Να γράψετε στο τετράδιό σας ποια από τις συναρτήσεις F , G , H , T μπορεί να είναι η παράγωγος της συνάρτησης f και ποια της συνάρτησης g . Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 4)

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 6 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

A2. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat για μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ (Μονάδες 2) και να το αποδείξετε. (Μονάδες 4).

Ισχύει το αντίστροφο του θεωρήματος του Fermat; Αν ναι να το αποδείξετε, αν όχι να δώσετε κατάλληλο παράδειγμα που να επιβεβαιώνει τον ισχυρισμό σας (Μονάδες 3).

(Μονάδες 9)

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν $f(x) = |x|$ για κάθε $x \neq 0$, τότε $f'(x) = \frac{1}{|x|}$ για κάθε $x \neq 0$.

β. Ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 1$.

γ. Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$, είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$.

δ. Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, αν η G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε ισχύει: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = G(\beta) - G(\alpha)$.

ε. Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού $A, B \neq \emptyset$ αντίστοιχα, τότε η $f \circ g$ ορίζεται αν $f(A) \cap B \neq \emptyset$.

(Μονάδες 10)

A4. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη φράση η οποία συμπληρώνει σωστά την ημιτελή πρόταση:

«Για κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, αν ισχύει $f(\alpha) = f(\beta)$, τότε:

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

α. η εξίσωση $f'(x) = 0$ δεν έχει λύση στο (α, β) .

β. η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει ακριβώς μία λύση στο (α, β) .

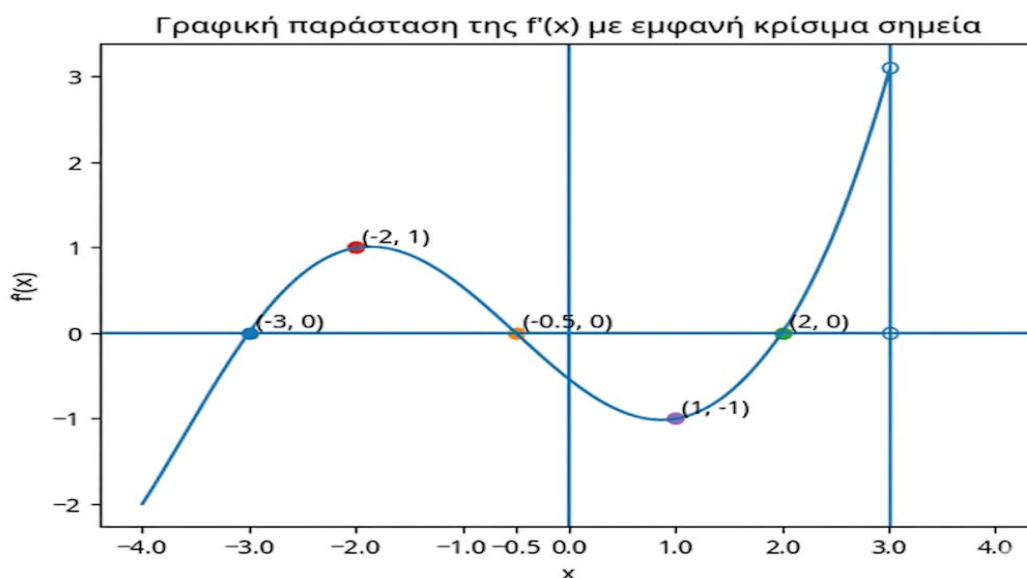
γ. η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο (α, β) ».

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 2)

Θ Ε Μ Α Β

Στο επόμενο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου $f'(x)$ μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f στο διάστημα $[-4, 3]$.



Με βάση **μόνο το σχήμα** της $f'(x)$:

B1. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα στο διάστημα $(-4, 3)$ προσδιορίζοντας τις αντίστοιχες τιμές του x .

(Μονάδες 6)

B2. Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμψής.

(Μονάδες 6)

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

B3. Να διατάξετε σε φθίνουσα σειρά τις τιμές:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right), \quad f\left(\frac{3}{2}\right), \quad f(2)$$

χωρίς να βρείτε τύπο της f , αιτιολογώντας την απάντησή σας με βάση τα συμπεράσματα που εξάγονται από το σχήμα.

(Μονάδες 6)

B4. Αν E είναι το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τις ευθείες $x=1$, $x=3$ και τον άξονα $x'x$, να αποδείξετε ότι:

$$E \geq f'\left(\frac{3}{2}\right) + 2f\left(\frac{3}{2}\right)$$

(Μονάδες 7)

Θ Ε Μ Α Γ

Έστω μία συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη, η οποία ικανοποιεί τις επόμενες συνθήκες:

$$f(1) = 0, \quad f'(1) = 1$$

$$2f(x) + 4xf'(x) + x^2f''(x) = 2\ln x + 3, \text{ για κάθε } x > 0.$$

Δίνεται επίσης η συνάρτηση:

$$g(x) = 2xf(x) + x^2f'(x) - x(2\ln x + 1), \quad x > 0.$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή στο διάστημα $(0, +\infty)$.

(Μονάδες 5)

Γ2. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = \ln x, \quad x > 0.$$

(Μονάδες 5)

ΑΡΧΗ 5ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

Γ3. i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

(Μονάδες 4)

ii. Αν ένα σημείο $M(x(t), y(t))$, όπου t ο χρόνος σε sec και $x(t) > 1$, κινείται πάνω στην καμπύλη της γραφικής παράστασης $C_{f \circ f}$ της $f \circ f$ με σταθερό ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του και ίσο με 1 cm/sec , να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου M τη χρονική στιγμή t_0 , κατά την οποία $x(t_0) = 2 \text{ cm}$.

(Μονάδες 6)

Γ4. Να αποδείξετε ότι:

$$\left| f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \right| < \sqrt{f(\alpha) \cdot f(\beta)} \text{ για κάθε } \alpha, \beta \in \left(0, \frac{1}{e}\right) \text{ με } \alpha < \beta.$$

(Μονάδες 5)

Θ Ε Μ Α Δ

Δίνεται μια συνάρτηση f ορισμένη στο \mathbb{R} , με συνεχή πρώτη παράγωγο για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

$$f(x) + f(1 - x) = 0 \quad (1) \text{ και } f'(x) \neq 0 \quad (2), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Δ1. Να βρείτε την μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$.

(Μονάδες 4)

Δ2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(x_0) = 2f(1).$$

(Μονάδες 3)

ΤΕΛΟΣ 5ΗΣ ΑΠΟ 6 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 6ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

Δ3. Έστω η συνάρτηση:

$$g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}, x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g , στο σημείο στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα $x'x$, σχηματίζει με αυτόν γωνία 45^0 .

(Μονάδες 4)

Δ4. i. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^1 f(x)dx = 0.$$

(Μονάδες 3)

Δίνεται επιπλέον ότι $\int_0^1 f'(x)dx = 1$ καθώς και ότι η συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής στο \mathbb{R} .

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\Omega)$ του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1} , τις ευθείες $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{2}$ και τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 4)

Δ5. i. Να υπολογίσετε την παράσταση :

$$K(\lambda) = \int_{\frac{1}{2}}^{\lambda} f(x)dx + \int_0^{f(\lambda)} f^{-1}(x)dx, \text{ όπου } \lambda > \frac{1}{2}.$$

(Μονάδες 4)

ii. Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{K(\lambda) \cdot \ln \lambda}{f(\lambda) \cdot e^{\lambda}}.$$

(Μονάδες 3)

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα, μόνο με μπλε ή μόνο με μαυρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Ώρα δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

Ευχόμαστε επιτυχία

Επιστημονική Επιμέλεια:

Καραγιάννης Ιωάννης, Σύμβουλος Εκπαίδευσης ΠΕ03 Κυκλάδων & Α΄ Αθήνας