Ενδεικτικές Απαντήσεις

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολ. Σελ. 76

Α2. Σχολ. Σελ. 25

Α3. Σχολ. Σελ. 185

Α4. 1. Λ 2. Λ 3. Λ 4. Λ 5. Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $f'(x)=\ldots=\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x=\pm 1$

$f'(x)>0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x<-1$ ή $x>1$

$f'(x)<0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow -1<x<1$

Η f γν. αύξουσα στα $(-\infty , -1]$ και $[1 , +\infty)$

Η f γν. φθίνουσα στο $[-1 , 1]$

Παρουσιάζει τοπ. μεγιστο στο $x_o=-1$ το $f(-1)=3/2$

Παρουσιάζει τοπ. ελάχιστο στο $x_o=1$ το $f(1)=1/2$

Β2. $f''(x)=\ldots=\frac{2x(3-x^2)}{(x^2+1)^3}$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x=0$ ή $x=\pm\sqrt{3}$

$f''(x)>0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x<-\sqrt{3}$ ή $0<x<\sqrt{3}$

$f''(x)<0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow -\sqrt{3}<x<0$ ή $x>\sqrt{3}$

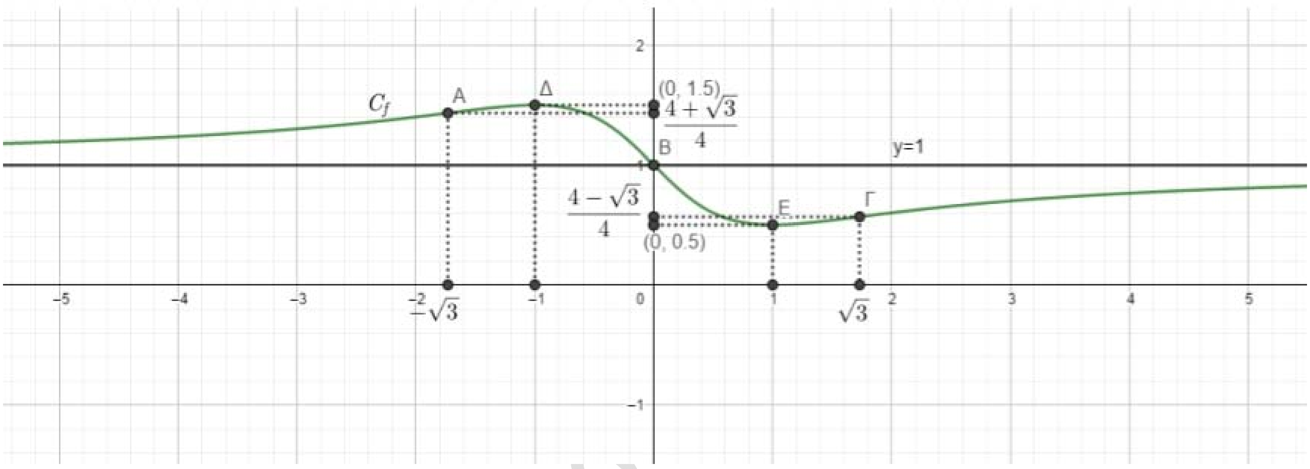
Η f είναι κυρτή στα $(-\infty\ ,\ -\sqrt{3}]$ και $[0\ ,\ \sqrt{3}]$

Η f είναι κοίλη στα $[-\sqrt{3}\ ,\ 0]$ και $[\sqrt{3}\ ,\ +\infty)$

Σημεία καμπής τα : $A(-\sqrt{3}\ ,\ \frac{4+\sqrt{3}}{4})$, $B(0\ ,\ 1)$, $\Gamma(\sqrt{3}\ ,\ \frac{4-\sqrt{3}}{4})$

Β3. Η f είναι συνεχής στο R άρα δεν εχει κατακορυφες ασύμπτωτες

Επειδή $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \ldots = 1$, έχουμε y=1 οριζόντια ασύμπτωτη στο ±∞



Β4. Η γραφική παράσταση της f τέμνει την y=1 μόνο στο σημείο Β(0,1)

(από Β3)

Επίσης από Β3 η Cf βρίσκεται κάτω από την γραφικη παρασταση της ευθείας y=1 για $x\epsilon[0,1]$,….$f(x)\le 1 \Leftrightarrow f(x)-1\le 0$, $x\epsilon[0,1]$

$E=\int_0^1 |f(x)-1|dx = \int_0^1 (1-f(x)dx = \ldots = \ln\sqrt{2}$ τ.μ.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $g'(x)=2f(x)+2xf'(x)+2xf'(x)+x^2f''(x)-2\ln x-1-2=$

$=2f(x)+4xf'(x)+x^2f''(x)-2\ln x-3=0$ λογω της δοσμένης σχέσης

Επομένως η συνάρτηση g είναι σταθερή , $g(x)=c\ \epsilon R$, $x>0$

Γ2. $g(x)=c \Leftrightarrow g(1)=c \Rightarrow 2f(1)+f'(1)-1=c \Rightarrow c=0$

$g(x)=0 \Leftrightarrow x^2f'(x)-x(2\ln x+1)+2xf(x)=0 \Leftrightarrow 2xf(x)+x^2f'(x)=x(2\ln x+1) \Leftrightarrow$

$[x^2f(x)]'=[x^2\ln x]' \Leftrightarrow x^2f(x)=x^2\ln x+c_1$

Για $χ=1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow c_1=0$

Επομένως $x^2f(x)=x^2\ln x \Leftrightarrow f(x)=\ln x$, $χ>0$

Γ3. Έστω $A(xo,f(xo))$ το σημείο επαφής της Cf με την εφαπτομένη της (ε) που διέρχεται από την αρχή των αξόνων

$f'(x)=1/x$, $x>0$

$y-f(xo)=f'(xo)(x-xo) \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow xo=e$

άρα (ε) : $y-f(e)=f'(e)(x-e) \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow y=(1/e)x$

Γ4. έχουμε : $y(t)=(fof)(t)=f(f(t))=\ln(\ln(x(t))$, $t>0$, $x(t)>1$

$y'(t)=\frac{1}{\ln(x(t))}(\ln(x(t))'=\frac{x'(t)}{\ln x(t)\cdot x(t)}$, $t>0$

$y'(to)'=\frac{x'(to)}{\ln x(to)\cdot x(to)}=\frac{1}{2\ln 2}$cm/sec

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $\int_0^1 g'(x)dx=\int_0^1(f^2(x)-4f(x)+3)dx \Leftrightarrow [g(x)]_0^1=\int_0^1((f(x)-2)^2-1)dx \Leftrightarrow$

$g(1)-g(0)=4/3$ & $g(1)+g(0)=4/3$ οποτε από το συστημα έχουμε $g(0)=0$ & $g(1)=4/3$

Δ2. Αφού η f είναι γν. μονότονη στο R είναι ή γν. αύξουσα ή γν. φθίνουσα

Έχουμε : $0<2$ & $f(0)=0<2=f(2)$ και επειδή f είναι γνησίως μονότονη τότε θα είναι γν. αύξουσα στο R

$x<2 \Rightarrow f(x)<f(2) \Rightarrow f(x)-2<0$

$x>2 \Rightarrow f(x)>f(2) \Rightarrow f(x)-2>0$

$g'(x)=(f(x)-2)^2-1$

- $x_1 , x_2 \in(-\infty , 2)$

$x_1<x_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow g'(x_1)>g'(x_2)$

άρα η g′ είναι γν. φθίνουσα και συνεπώς η g στρέφει τα κοιλα κάτω στο $(-\infty , 2]$

- $x_1 , x_2 \in(2 , +\infty)$

$x_1<x_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow g'(x_1)<g'(x_2)$

άρα η g′ είναι γν. αύξουσα και συνεπώς η g στρέφει τα κοιλα πάνω στο $[2,+\infty)$

Δ3. (i) η εξίσωση της εφαπτομένης της g στο (0,g(0)) ειναι :

$y-g(0)=g'(0)(x-0) \Leftrightarrow y=3x$

όμως η g στρέφει τα κοίλα κάτω στο $(-\infty,2]$ επομένως θα έχουμε : $g(x)\leq 3x$

(ii) για κάθε $x\leq 2$ ισχύει $g(x)\leq 3x$ με το = να ισχύει μόνο για $x=0$

Συνεπώς για κάθε $x<0$ έχουμε : $g(x)<3x<0 \Rightarrow \frac{1}{g(x)}>\frac{1}{3x} \Rightarrow \frac{x^3}{g(x)} < \frac{x^2}{3}$

$$\int_{-2}^{-1} \frac{x^3}{g(x)}dx < \int_{-2}^{-1} \frac{x^2}{3}dx = \frac{7}{9}$$

Δ4. Θεωρούμε $h(x)=e^{x-2}+g(x)+x$, $x \in R$

Τότε $h(x)=h(2)$ που σημαίνει ότι εχει προφανής ρίζα τη $\chi=2$

$h'(x)=e^{x-2}+g'(x)+1=e^{x-2}+(f(x)-2)^2>0$ για κάθε $\chi \neq 2$

Η h είναι συνεχής στο 2 άρα είναι γν. αύξουσα συνεπώς 1-1

Επομένως $\chi=2$ μοναδική.

ΠΑΝΑΓΟΥ ΓΙΩΡΓΟΣ (ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΟΣ ΥΠΕΥΘΥΝΟΣ)