

**ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β)
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)**

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν η f είναι συνεχής στο Δ και $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

(ΜΟΝΑΔΕ 7)

A2. (α) Τι ονομάζουμε σύνθεση της f με τη g ;
(β) Πώς ορίζεται το πεδίο ορισμού της;

(ΜΟΝΑΔΕΣ 4)

A3. Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ , τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ;

(ΜΟΝΑΔΕΣ 4)

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό αν η πρόταση είναι σωστή ή Λάθος αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Αν η f δεν είναι συνεχής στο x_0 , τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .
2. Αν $\int_a^b f(x)dx \geq 0$, τότε κατ' ανάγκη $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$
3. Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται «πάνω» από τη γραφική της παράσταση
4. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f .

5. Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα μιας συνάρτησης είναι πάντοτε το μέγιστο αυτής.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 10)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$

B1. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα

(ΜΟΝΑΔΕΣ 5)

B2. Να μελετηθεί ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμψής

(ΜΟΝΑΔΕΣ 6)

B3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f και να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της f

(ΜΟΝΑΔΕΣ 7)

B4. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την C_f και τις ευθείες $x=1$, $y=1$

(ΜΟΝΑΔΕΣ 7)

ΘΕΜΑ Γ

Έστω μια συνάρτηση $f:(0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη, η οποία ικανοποιεί τις επόμενες συνθήκες:

- $f(1)=0$
- $f'(1)=1$
- $2f(x)+4xf'(x)-3=2\ln x-x^2f''(x)$, $x>0$

Δίνεται επίσης η συνάρτηση: $g(x)=x^2f'(x)-x(2\ln x+1)+2xf(x)$, $x>0$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή στο $(0, +\infty)$.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 6)

Γ2. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\ln x$, $x>0$

(ΜΟΝΑΔΕΣ 6)

Γ3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 6)

Γ4. Αν ένα σημείο $M(x(t), y(t))$, όπου t ο χρόνος σε sec και $x(t)>1$, κινείται πάνω στην καμπύλη της C_f με σταθερό ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του και ίσο με 1cm/sec , να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου M τη χρονική στιγμή t_0 , κατά την οποία $x(t_0)=2\text{cm}$.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 7)

ΘΕΜΑ Δ

Θεωρούμε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής και γνησίως μονότονη, η γραφική παράσταση της οποίας διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο $A(2,2)$.

Θεωρούμε επίσης παραγωγίσιμη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Για τις συναρτήσεις f, g ισχύουν :

- $g'(x) = f^2(x) - 4f(x) + 3, x \in \mathbb{R}$
- $\int_0^1 (f(x) - 2)^2 dx = \frac{7}{3}$
- $g(1) + g(0) = 4/3$

Δ.1 Να αποδείξετε ότι $g(0) = 0$ & $g(1) = 4/3$.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 4)

Δ.2 Να αποδείξετε ότι η g στρέφει τα κοίλα κάτω στο $(-\infty, 2]$ και τα κοίλα πάνω στο $[2, +\infty)$

(ΜΟΝΑΔΕΣ 6)

Δ.3 Να αποδείξετε ότι :

(i) $g(x) \leq 3x, x \leq 2$

(ΜΟΝΑΔΕΣ 5)

(ii) $\int_{-2}^{-1} \frac{x^3}{g(x)} dx < \frac{7}{9}$

(ΜΟΝΑΔΕΣ 4)

Δ.4 Να λυθεί η εξίσωση: $e^{x-2} + g(x) + x = 3 + g(2)$

(ΜΟΝΑΔΕΣ 6)

ΟΔΗΓΙΕΣ (για σας εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμία άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε σας απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΠΑΝΑΓΟΥ ΓΙΩΡΓΟΣ (ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΟΣ ΥΠΕΥΘΥΝΟΣ)