Τυπολόγιο: Ευθύγραμμη κίνηση

Μετατόπιση: $\Delta\vec{x} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1 \ (m)$

Μέση διανυσματική ταχύτητα: $\vec{\upsilon}_\mu = \dfrac{\Delta\vec{x}}{\Delta t} = \dfrac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1}{t_2 - t_1} \ (m/s)$

Μέση αριθμητική ταχύτητα: $\upsilon_\mu = \dfrac{S_{ολ}}{t_{ολ}} \ (m/s)$

Επιτάχυνση: $\vec{\alpha} = \dfrac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t} \ (m/s^2)$

Ευθύγραμμη ομαλή κίνηση: $(\vec{\upsilon} = \text{σταθερό})$

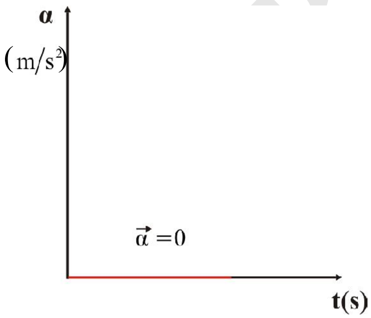
Εξισώσεις
επιτάχυνσης — ταχύτητας
μετατόπισης

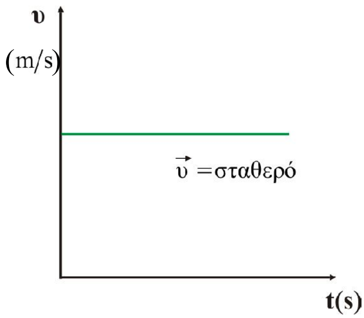
$\vec{\alpha} = 0$ — $\vec{\upsilon} = \text{σταθερό}$

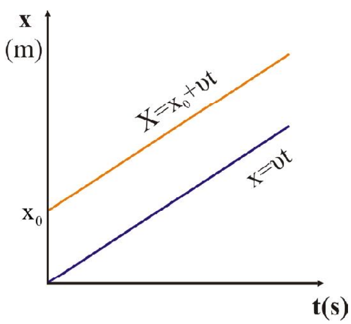
$\Delta x = \upsilon \Delta t$

$x = x_0 + \upsilon(t - t_0)$

Διαγράμματα







Ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση $(\vec{\alpha} = \text{σταθερό})$

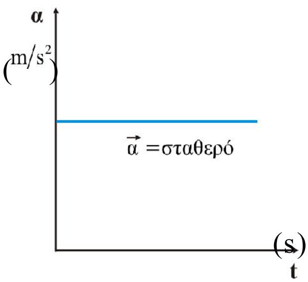
α. Ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση

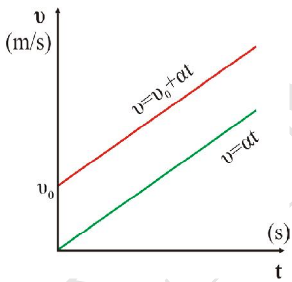
$\vec{\alpha} = \text{σταθερό}$, $\alpha > 0$, $\Delta\upsilon > 0$

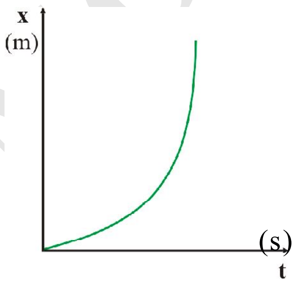
Εξισώσεις

επιτάχυνσης	ταχύτητας	μετατόπισης
$\vec{\alpha} = \text{σταθερό}$	$\Delta\upsilon = \alpha\Delta t$ $\upsilon = \upsilon_0 + \alpha(t - t_0)$	$\Delta x = \upsilon_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$

Διαγράμματα







Σχέση υ-x σε ευθύγραμμη ομαλή επιταχυνόμενη

$$\upsilon^2 = \upsilon_o^2 + 2\alpha x \quad \text{ή} \quad \upsilon = \sqrt{\upsilon_o^2 + 2\alpha x}$$

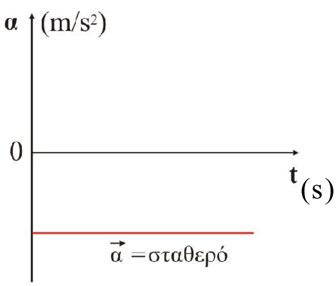
β. Ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση

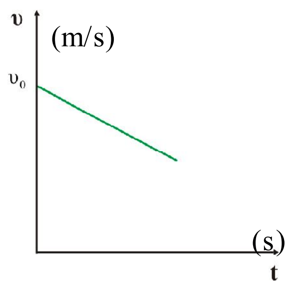
$\vec{\alpha} = \text{σταθερό}$, α το μέτρο της επιβράδυνσης, $\Delta\upsilon < 0$,

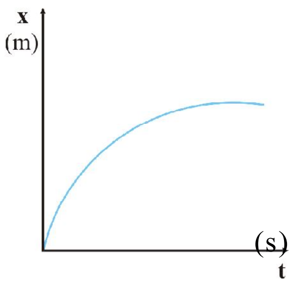
Εξισώσεις

επιτάχυνσης	ταχύτητας	μετατόπισης
$\vec{\alpha} = \text{σταθερό}$	$\Delta\upsilon = -\alpha\Delta t$ $\upsilon = \upsilon_0 - \alpha\Delta t$	$\Delta x = \upsilon_0 t - \frac{1}{2}\alpha\Delta t^2$

Διαγράμματα







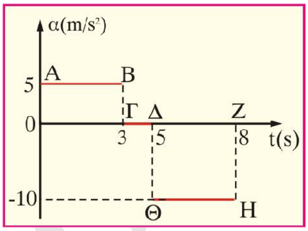
Σχέση υ-x σε ευθύγραμμη ομαλή επιβραδυνόμενη όταν $\upsilon_{\text{τελική}} = 0$

$$x = \frac{\upsilon_0^2}{2\alpha} \quad \text{ή} \quad \upsilon_0 = \sqrt{2\alpha x}$$

Ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη όταν $\upsilon_{\text{τελική}} \neq 0$: $\upsilon^2 = \upsilon_o^2 - 2\alpha x$ ή $\upsilon = \sqrt{\upsilon_o^2 - 2\alpha x}$

Ευθύγραμμη κίνηση

1. Για κινητό που κινείται ευθύγραμμα και την χρονική στιγμή $t_0 = 0$ βρίσκεται στη θέση $x_0 = 0$ και έχει ταχύτητα $\upsilon_0 = 10\,m/s$ δίνεται το διπλανό διάγραμμα επιτάχυνσης - χρόνου. Με τη βοήθεια του διαγράμματος να υπολογιστεί η ταχύτητα του κινητού τη χρονική στιγμή $t = 8\,s$ και να γίνουν τα διαγράμματα ταχύτητας - χρόνου και θέσης - χρόνου.



Λύση:

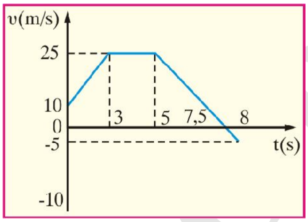
Για το χρονικό διάστημα $\Delta t_1 = t_1 - t_0 = 3s - 0 = 3s$ το κινητό επιταχύνεται ομαλά. Η μεταβολή της ταχύτητας ισούται με το εμβαδό του σχήματος ΟΑΒΓ. Είναι

$\Delta\upsilon_1 = 5m/s^2 \cdot 3s = 15m/s$, αλλά $\Delta\upsilon_1 = \upsilon_1 - \upsilon_0$ οπότε :

$\upsilon_1 = \Delta\upsilon_1 + \upsilon_0 = 25m/s$

Για το χρονικό διάστημα $\Delta t_2 = t_2 - t_1 = (5-3)s = 2s$ το κινητό κινείται ευθύγραμμα ομαλά με ταχύτητα $\upsilon_2 = \upsilon_1 = 25\,m/s$.

Τέλος για το χρονικό διάστημα $\Delta t_3 = t_3 - t_2 = (8-5)s = 3s$ το κινητό επιβραδύνεται ομαλά.

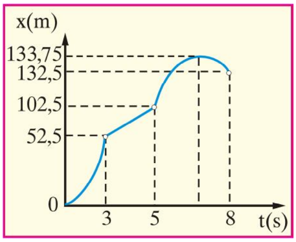


Η μεταβολή της ταχύτητας ισούται με

$$\Delta\upsilon_3 \overset{αρ.}{=} -E_{ΔΖΗΘ} \Rightarrow \upsilon_3 - \upsilon_2 = -30m/s \Rightarrow \upsilon_3 = -5m/s$$

Το αρνητικό πρόσημο στην τελική τιμή της ταχύτητας σημαίνει ότι το κινητό έχει αντιστρέψει την φορά κίνησής του. Ουσιαστικά επιταχύνεται πλέον κατά την αρνητική κατεύθυνση του άξονα.

Απο το διπλανό διάγραμμα :



$\Delta x_1 = \dfrac{10+25}{2}\cdot 3m = 52{,}5m$ $\quad x_1 = x_0 + \Delta x_1 = 0 + 52{,}5m = 52{,}5m$

$\Delta x_2 = 25 \cdot 2m = 50m$

$x_2 = x_1 + \Delta x_2 = 52{,}5m + 50m = 102{,}5m$

$\Delta x_3 = \dfrac{25 \cdot 2{,}5}{2}m = 31{,}25m$

$x_3 = x_2 + \Delta x_3 = 102{,}5m + 31{,}25m = 133{,}75m$

$\Delta x_4 = \dfrac{0{,}5 \cdot (-5)}{2} = -1{,}25m$ $\quad x_4 = x_3 + \Delta x_4 = 133{,}75m + (-1{,}25m) = 132{,}5m$

2. Αυτοκίνητο κινείται με ταχύτητα 20 m/s. Ο οδηγός , του οποίου ο χρόνος αντίδρασης είναι 0,5 s, αντιλαμβάνεται κόκκινο φανάρι σε απόσταση 50 m.
α. Αν η επιβράδυνση του αυτοκινήτου έχει τιμή 4 m/s² , θα προλάβει το αυτοκίνητο να σταματήσει πρίν το φανάρι ;
β. Αν όχι, ποια θα έπρεπε να είναι η τιμή της επιβράδυνσης για να σταματήσει έγκαιρα;

Λύση:

α. Το αυτοκίνητο κινείται με σταθερή ταχύτητα $\upsilon_0 = 20\,m/s$ για χρόνο $\Delta t_1 = 0,5s$ και διανύει διάστημα $\Delta x_1 = \upsilon_0 \cdot \Delta t_1 = 10m$.

Συνεπώς για την επιβραδυνόμενη κίνηση απομένουν $\Delta x_2 = (50-10)\,m = 40m$.

Ãéá íá óôáìáôÞóåé ôï áõôïêßíçôï áðáéôåßôáé ÷ñüíïò Δt_2 .

Από την εξίσωση της ταχύτητας :

$$0 = \upsilon_0 - \alpha \cdot \Delta t_2 \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{\upsilon_0}{\alpha} = 5s$$

Στον χρόνο αυτό το αυτοκίνητο θα διένυε:

$$\Delta x'_2 = \upsilon_0 \cdot \Delta t_2 - \frac{1}{2}\alpha \cdot \Delta t_2{}^2 = 50m$$

Επειδή $\Delta x'_2 > \Delta x_2$ δεν προλαβαίνει να σταματήσει.

β. Έστω α_1 το μέτρο της απαιτούμενης επιβράδυνσης για να σταματήσει έγκαιρα σε χρόνο $\Delta t'$ καλύπτοντας απόσταση Δx_2. Είναι:

$$0 = \upsilon_0 - \alpha_1 \cdot \Delta t' \Rightarrow \Delta t' = \frac{\upsilon_0}{\alpha_1} \quad (1)$$

$$\Delta x_2 = \upsilon_0 \cdot \Delta t' - \frac{1}{2}\alpha_1 \cdot \left(\Delta t'\right)^2 \overset{(1)}{\Rightarrow} \Delta x_2 = \frac{\upsilon_0{}^2}{2\alpha_1} \Rightarrow \alpha_1 = 5\,m/s^2$$

Η επιβράδυνση πρέπει να είναι $\alpha_1 = 5\ m/s^2$

3. Δρομέας των 200 m ξεκινάει από την ηρεμία και κινείται ευθύγραμμα με σταθερή επιτάχυνση $\alpha_1 = 3\,m/s^2$ μέχρις ότου αποκτήσει ταχύτητα $\upsilon_1 = 12\,m/s$ την οποία και διατηρεί μέχρι τη θέση που βρίσκεται 56 m πριν τον τερματισμό. Στη συνέχεια λόγω κόπωσης επιβραδύνεται ομαλά και τερματίζει σε συνολικό χρόνο 20s.
Να βρεθεί η επιβράδυνση και η ταχύτητα τερματισμού.

Λύση:

Για την επιταχυνόμενη κίνηση ισχύει :

$$\upsilon_1 = \alpha_1 \cdot \Delta t_1 \Rightarrow \Delta t_1 = 4s$$

$$\Delta x_1 = \frac{1}{2}\alpha_1 \Delta t_1{}^2 = 24m$$

Στην συνέχεια με την σταθερή ταχύτητα υ_1 μετατοπίζεται κατά

$$\Delta x_2 = \upsilon_1 \cdot \Delta t_2 \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{\Delta x_2}{\upsilon_1} \quad (1)$$

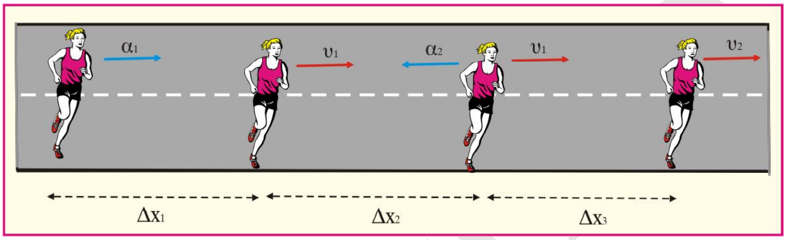
Όμως $\Delta x_2 = 200m - 24m - 56m = 120m$

Επομένως από την (1): $\Delta t_2 = 10s$ και $\Delta t_3 = 20s - 14s = 6s$

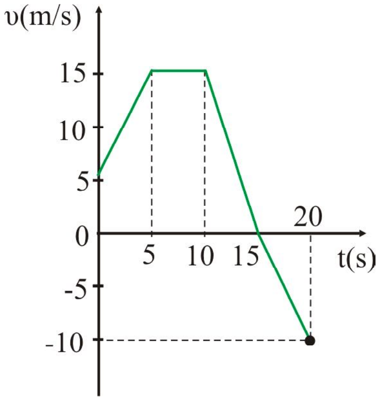
Τέλος για την επιβραδυνόμενη έχουμε : $\Delta x_3 = \upsilon_1 \cdot \Delta t_3 - \frac{1}{2}\alpha_2 \cdot (\Delta t_3)^2 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{8}{9} m/s^2$

όπου α_2 είναι το μέτρο της επιβράδυνσης και $\Delta x_3 = 56$ m

$\upsilon_2 = \upsilon_1 - \alpha_2 \cdot \Delta t_3 = 6,67 m/s$



4. Για κινητό που κινείται ευθύγραμμα την χρονική στιγμή t_0=0 βρίσκεται στη θέση x_0=0 και η ταχύτητά του δίνεται στο διάγραμμα.
Να βρεθεί:
α. Τι κινήσεις κάνει. Να υπολογισθεί το Δx, σε κάθε κίνηση.
β. Να γίνει διάγραμμα α(t), x(t).



Λύση:

α. Από 0 έως 5s: Ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη

$$\alpha_1 = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{15-5}{5-0} m/s^2 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{10}{5} = 2 m/s^2$$

$$\Delta x_1 \overset{\alpha\rho\iota\theta.}{=} E\mu = \frac{15+5}{2} 5m = 50m$$

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0 \Rightarrow 50m = x_1 - 0 \Rightarrow x_1 = 50m$$

Από 5 έως 10s: Ευθύγραμμη ομαλή κίνηση

$$\alpha_2 = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} \Rightarrow \alpha_2 = \frac{15-15}{10-5} m/s^2 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{0}{5} m/s^2 \Rightarrow \alpha_2 = 0 m/s^2$$

$$\Delta x_2 \overset{\alpha\rho\iota\theta.}{=} E\mu = 15 \cdot 5m = 75m$$

$$\Delta x_2 = x_2 - x_1 \Rightarrow 75m = x_2 - 50m \Rightarrow x_2 = 125m$$

Από 10 έως 15s: Ευθύγραμη ομαλά επιβραδυνόμενη (τη στιγμή t=15s το κινητό σταματάει $\upsilon_{3_{\tau\varepsilon\lambda}} = 0$)

$$\alpha_3 = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} \Rightarrow \alpha_3 = \frac{0-15}{15-10} m/s^2 \Rightarrow \alpha_3 = \frac{-15}{5} = -3 m/s^2$$

$$\Delta x_3 \overset{\alpha\rho\iota\theta.}{=} E\mu = \frac{15 \cdot 5}{2} m = \frac{75}{2} = 37,5m$$

$$\Delta x_3 = x_3 - x_2 \Rightarrow 37,5m = x_3 - 125m \Rightarrow x_3 = 162,5m$$

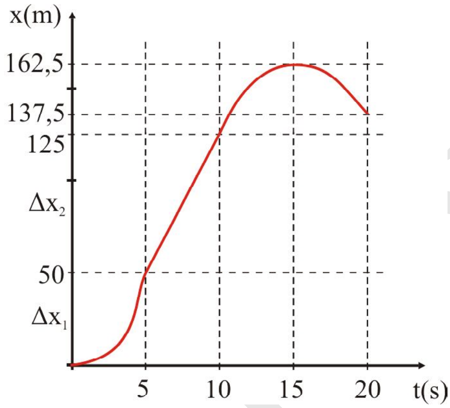
Από 15 έως 20s: Ευθύγραμμα ομαλά επιταχυνόμενη με αντίθετη φορά

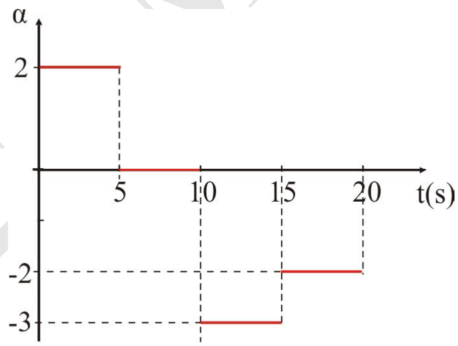
$$\alpha_4 = \frac{\Delta \upsilon}{\Delta t} \Rightarrow \alpha_4 = \frac{-10 - 0}{20 - 15} m/s^2 \Rightarrow \alpha_4 = \frac{-10}{5} = -2\, m/s^2$$

$$\Delta x_4 \overset{\alpha\rho\iota\theta.}{=} E\mu = \frac{-10 \cdot 5}{2} m = -25m$$

$$\Delta x_4 = x_4 - x_3 \Rightarrow -25m = x_4 - 162,5m \Rightarrow x_4 = 137,5m$$

β.





5. Σώμα που κινείται ευθύγραμμα με σταθερή επιτάχυνση $\alpha = 10\ m/s^2$, τη χρονική στιγμή $t = 0$ έχει ταχύτητα $\upsilon_0 = 20\ m/s$. Να βρείτε στη διάρκεια ποιου δευτερολέπτου έχει μετατοπιστεί κατά $\Delta x = 85\ m$.

Λύση:

Η θέση του σώματος τη χρονική στιγμή t είναι: $x_t = \upsilon_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2 \quad (1)$

Η θέση του, μετά από 1s, τη χρονική στιγμή $t+1$ είναι: $x_{t+1} = \upsilon_0 (t+1) + \frac{1}{2} \alpha (t+1)^2 \quad (2)$

Άρα $\Delta x = x_{t+1} - x_t \xrightarrow[(2)]{(1)} \Delta x = \upsilon_0 (t+1) + \frac{1}{2} \alpha (t+1)^2 - \upsilon_0 t - \frac{1}{2} \alpha t^2 \Rightarrow$

$$\Delta x = \upsilon_0 t + \upsilon_0 + \frac{1}{2} \alpha \left(t^2 + 2t + 1\right) - \upsilon_0 t - \frac{1}{2} \alpha t^2 \Rightarrow$$

$$85 = 20 + \frac{1}{2} \cdot 10 \left(t^2 + 2t + 1\right) - \frac{1}{2} \cdot 10 t^2 \Rightarrow$$

$$85 = 20 + 5t^2 + 10t + 5 - 5t^2 \Rightarrow 85 - 25 = 10t \Rightarrow 10t = 60 \Rightarrow t = 6s \text{ και } t + 1 = 7s$$

Άρα είναι η διάρκεια του 7ου δευτερολέπτου.

6. Δύο κινητά ξεκινούν από δύο σημεία Α και Β που απέχουν 375m και κινούνται αντίθετα. Το κινητό Α έχει σταθερή ταχύτητα $10\,m/s$. Το κινητό Β έχει σταθερή επιτάχυνση $\alpha_B = 2\,m/s^2$. Να βρεθεί το σημείο που θα συναντηθούν μεταξύ τους.

Λύση:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Κινητό } A: x_A = \upsilon_A \cdot t \\ \text{Κινητό } B: x_B = \frac{1}{2}\alpha t^2 \\ \text{πρέπει } d = x_A + x_B \end{array}\right\} \Rightarrow d = \upsilon_A t + \frac{1}{2}\alpha_B t^2 \Rightarrow 375 = 10t + \frac{1}{2}2t^2 \Rightarrow$$

$$t^2 + 10t - 375 = 0 \Rightarrow t = 15\,s.$$

Ο χρόνος που θα συναντηθούν είναι 15 s

$x_A = \upsilon_A t \;\Rightarrow\; x_A = 10 \cdot 15\,m \;\Rightarrow\; x_A = 150\,m$

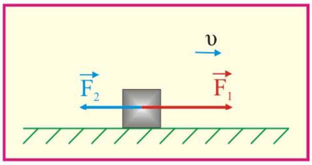
Άρα θα συναντηθούν σε απόσταση 150 m από το Α και $375 - 150 = 225$ m από το Β.

Τυπολόγιο: Δυναμική σε μια διάσταση

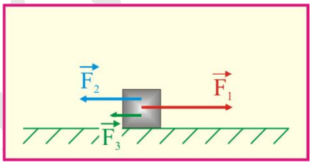
<table>
<tr><th colspan="3">Δυναμική σε μία διάσταση</th></tr>
<tr><td colspan="3">Συνισταμένη δύο δυνάμεων που έχουν ίδια κατεύθυνση $F = F_1 + F_2$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Συνισταμένη δύο δυνάμεων που έχουν αντίθετη κατεύθυνση $F = |F_1 - F_2|$</td></tr>
<tr><td colspan="3">2ος Ν. Νεύτωνα $\Sigma\vec{F} = m \cdot \vec{\alpha}$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Διερεύνηση:</td><td colspan="2">α. Αν $\Sigma\vec{F} = 0$ τότε $\vec{\upsilon} = \vec{0}$ ή $\vec{\upsilon} = \sigma\tau\alpha\theta\,(x = \upsilon \cdot t)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">β. Αν $\Sigma\vec{F} = \sigma\tau\alpha\theta$ τότε $\vec{\alpha} = \sigma\tau\alpha\theta \begin{pmatrix} \upsilon = \upsilon_0 \pm \alpha t \\ x = \upsilon_0 t \pm \frac{1}{2}\alpha t^2 \end{pmatrix}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">γ. Αν $\Sigma\vec{F} = \mu\varepsilon\tau\alpha\beta\lambda$ τότε $\vec{\alpha} = \mu\varepsilon\tau\alpha\beta\lambda$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Βάρος:</td><td rowspan="2">$\vec{B} = m \cdot \vec{g}$</td><td>Αδρανειακή μάζα: $m = \frac{\Sigma F}{\alpha}$,</td></tr>
<tr><td>Βαρυτική μάζα: $m = \frac{B}{g}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Ελεύθερη πτώση: $\upsilon = g \cdot t$ $\quad S = \frac{1}{2}gt^2$</td></tr>
</table>

Δυναμική σε μια διάσταση

7. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα του σχήματος έχουν μέτρο $F_1 = 30$ N και $F_2 = 20$ N αντίστοιχα.
Αν το σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα $\upsilon = 5$ m/s, να εξεταστεί αν στο σώμα ασκείται τρίτη δύναμη και να βρεθεί η μετατόπιση του σώματος για χρονικό διάστημα $\Delta t = 5$ s.



Λύση:



Επειδή το σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα ($\vec{\upsilon}$ = σταθερή), σύμφωνα με τον πρώτο νόμο του Νεύτωνα για το σώμα θα ισχύει:

$$\Sigma\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0 \Rightarrow \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = -\vec{F}_1$$

Η ύπαρξη της $\vec{F}_3$ είναι απαραίτητη, γιατί οι δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ δεν είναι αντίθετες.

Επομένως, $\Sigma F = 0 \Rightarrow F_1 + (-F_2) + (-F_3) = 0 \Rightarrow$

$$F_1 - F_2 - F_3 = 0 \Rightarrow F_3 = 10\text{N}$$

Είναι προφανές, ότι η $\vec{F}_3$ θα είναι ομόρροπη της $\vec{F}_2$. Για τη μετατόπιση του σώματος θα έχουμε:

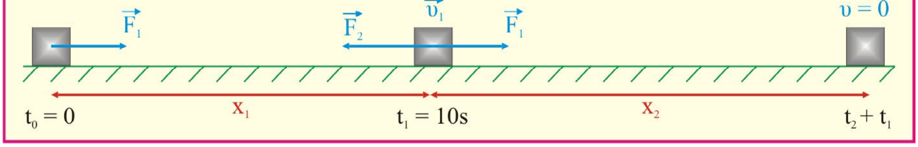
$$\Delta x = \upsilon \cdot \Delta t = 25\text{m}$$

8. Σώμα μάζας $m = 600$kg δέχεται δύναμη $F_1 = 1200$N και αρχίζει να κινείται. Μετά από χρόνο $t_1 = 10$s, ταυτόχρονα με την $\vec{F}_1$ ασκείται στο σώμα και μία άλλη δύναμη μέτρου $F_2 = 2700$N και αντίθετης φοράς με την $\vec{F}_1$.

α. Να βρεθεί ο συνολικός χρόνος κίνησης του σώματος μέχρι να μηδενιστεί η ταχύτητά του, καθώς και η συνολική απόσταση που διανύει το σώμα στο παραπάνω χρονικό διάστημα.

β. Να παρασταθούν γραφικά σε συνάρτηση με το χρόνο η συνολική δύναμη που ασκείται στο σώμα και η ταχύτητά του.

Λύση:



α. Αρχικά και για χρόνο $t_1 = 10$s το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση: $\alpha_1 = \dfrac{F_1}{m} = \dfrac{1200}{600}\text{m/s}^2 = 2\text{m/s}^2$. Η ταχύτητα και η θέση του τότε είναι:

$$\upsilon_1 = \alpha_1 t_1 = 2 \cdot 10\text{m/s} = 20\text{m/s}$$

$$x_1 = \frac{1}{2}\alpha_1 t_1{}^2 = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 10^2\,m = 100m$$

Στη συνέχεια και για χρόνο t_2 το σώμα κάνει επιβραδυνόμενη κίνηση με επιβράδυνση:

$$\alpha_2 = \frac{\Sigma F}{m} = \frac{F_2 - F_1}{m} = \left(\frac{2700-1200}{600}\right) m/s^2 = 2,5\,m/s^2$$

$$\upsilon = \upsilon_1 - \alpha_2 t_2 \overset{\upsilon=0}{\Rightarrow} 0 = 20 - 2,5\cdot t_2 \Rightarrow t_2 = 8s$$

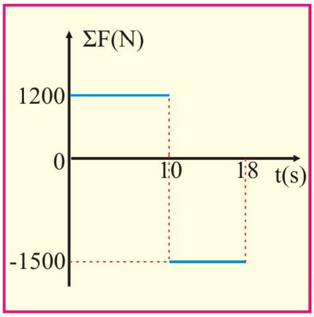
$$x_2 = \upsilon_1 t_2 - \frac{1}{2}\alpha_2 t_2^2 = \left(20\cdot 8 - \frac{1}{2}\cdot 2,5\cdot 8^2\right) m = 80\,m$$

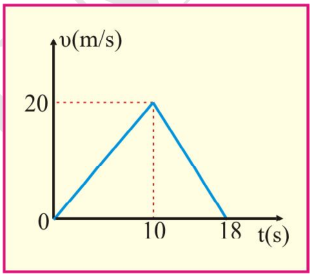
Συνεπώς, ο συνολικός χρόνος κίνησης του σώματος μέχρι να μηδενιστεί (στιγμιαία) η ταχύτητά του θα είναι:

$t_{ολ} = t_1 + t_2 = (10+8)s = 18s$, ενώ το συνολικό διάστημα:

$\Delta x_{ολ} = x_1 + x_2 = (100+80)m = 180\,m$

β.





9. Από την ταράτσα μιας πολυκατοικίας ύψους H = 45m αφήνουμε να πέφτουν πέτρες διαδοχικά ανά ένα δευτερόλεπτο. Αν η αντίσταση του αέρα θεωρηθεί αμελητέα και $g = 10\,m/s^2$, να υπολογίσετε:

α. Που βρίσκεται η πρώτη πέτρα όταν ξεκινάει η τρίτη;

β. Πόσο απέχουν η πρώτη και η δεύτερη όταν ξεκινάει η τρίτη;

γ. Όταν φτάνει η πρώτη πέτρα στο έδαφος, σε ποιο ύψος βρίσκεται η δεύτερη;

Λύση:

α. Όταν ξεκινάει η τρίτη πέτρα, η πρώτη κινείται ήδη για 2sec.

Άρα: $S_1 = \frac{1}{2}g t_1{}^2 = \frac{1}{2}\cdot 10\cdot 2^2\,m = 20m$

δηλαδή βρίσκεται 20m από την ταράτσα ή σε ύψος $45 - 20 = 25m$ από το έδαφος.

β. Όταν ξεκινάει η τρίτη πέτρα, η δεύτερη κινείται ήδη για 1s.

$$s_2 = \frac{1}{2}g t_2{}^2 = \frac{1}{2}\cdot 10\cdot 1^2\,m = 5m$$

Συνεπώς, η πρώτη και η δεύτερη απέχουν $s = s_1 - s_2 = 15m$

γ. Η πρώτη πέτρα φτάνει στο έδαφος μετά από: $H = \frac{1}{2}g t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2H}{g}} = 3s$

Η δεύτερη κινείται για (t - 1) s δηλ. 3 – 1 = 2 s και το διάστημα που θα έχει διανύσει:

$$s_2' = \frac{1}{2}\cdot 10\cdot 2^2\,m = 20m$$

Συνεπώς, θα βρίσκεται σε ύψος h = 25 m..

10. Σώμα ρίχνεται κατακόρυφα προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα $\upsilon_0 = 20m/s$. Θεωρώντας την αντίσταση του αέρα αμελητέα, να υπολογιστούν:

α. Το μέγιστο ύψος στο οποίο θα φτάσει το σώμα και ο χρόνος ανόδου.

β. Ο συνολικός χρόνος μέχρι να επιστρέψει το σώμα στο έδαφος και η ταχύτητα με την οποία επιστρέφει.

γ. Να βρεθεί η ταχύτητα που έχει το σώμα σε ύψος h = 15m από το έδαφος.

Δίνεται: $g = 10m/s^2$

Λύση:

Το σώμα εκτελεί κατακόρυφη βολή προς τα επάνω και η κίνησή του είναι ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση με επιβράδυνση $g = 10\,m/s^2$. Οι εξισώσεις για την κίνηση του σώματος είναι:

$$\upsilon = \upsilon_0 - gt \quad (1)$$

$$y = \upsilon_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (2)$$

α. Στο μέγιστο ύψος έχουμε: $y = h_{max}$ και $\upsilon = 0$

Άρα: $(1) \Rightarrow 0 = \upsilon_0 - gt_{\alpha\nu} \Rightarrow t_{\alpha\nu} = \frac{\upsilon_0}{g} = \frac{20}{10}s = 2s$

$$(2) \Rightarrow h_{max} = \upsilon_0\cdot t_{\alpha\nu} - \frac{1}{2}gt_{\alpha\nu}^2 \Rightarrow h_{max} = \upsilon_0\frac{\upsilon_0}{g} - \frac{1}{2}g\frac{\upsilon_0^{\ 2}}{g^2} \Rightarrow$$

$$h_{max} = \frac{\upsilon_0^{\ 2}}{2g} = \frac{20^2}{2\cdot 10}m = 20\,m$$

β. Όταν επιστρέφει στο έδαφος είναι $y = 0$

Άρα $(2) \Rightarrow 0 = 20t_{o\lambda} - \frac{1}{2}\cdot 10\,t_{o\lambda}^2 \Rightarrow t_{o\lambda}(20 - 5t_{o\lambda}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_{o\lambda} = 0 & \text{απορρίπτεται} \\ t_{o\lambda} = 4s & \text{δεκτή} \end{cases}$

Η ταχύτητα με την οποία επιστρέφει είναι:

$\upsilon = \upsilon_0 - gt_{o\lambda} = (20 - 10\cdot 4)\,m/s = -20\,m/s$, δηλαδή αντίθετή της $\vec{\upsilon}_0$.

γ. Για $h = 15m$ η (2) δίνει:

$$h = \upsilon_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow 15 = 20t - \frac{1}{2}10t^2 \Rightarrow t^2 - 4t + 3 = 0$$

Επιλύοντας την β΄ βάθμια ως προς το χρόνο θα έχουμε: $t = \frac{4 \pm 2}{2} = \left\langle \begin{matrix} t_1 = 1s \\ t_2 = 3s \end{matrix} \right.$

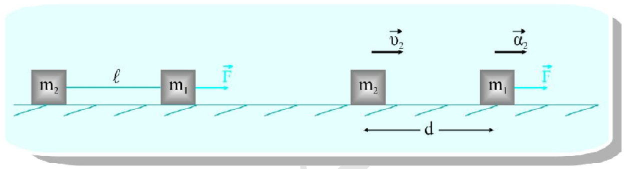
Τη χρονική στιγμή t_1 το σώμα περνάει από τη θέση $y = 15m$ ανεβαίνοντας, ενώ τη χρονική στιγμή t_2 κατεβαίνοντας. Οι ταχύτητες που θα έχει αντίστοιχα θα είναι:

$\upsilon_1 = \upsilon_0 - gt_1 = 10\,m/s$, κατά την άνοδο του σώματος.

$\upsilon_2 = \upsilon_o - gt_2 = -10\,m/s$, κατά την κάθοδο του σώματος.

11. Πάνω σε ένα λείο οριζόντιο επίπεδο βρίσκονται δύο μάζες με $m_1 = 1$ Kg και $m_2 = 3$ Kg που çñåìïýí äåìÝíåò óôéò Üêñåò åíüò ôåíôùìÝíïõ ó÷ïéíéïý ÷ùñßò ìÜæá ìå ìÞêïò $\ell = 4$ m. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ στη μάζα m_1 ασκείται σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου F = 8 N. Αν τη χρονική στιγμή $t_1 = 3s$ το σχοινί σπάει, ενώ η δύναμη συνεχίζει να ασκείται στη μάζα m_1, να βρείτε την απόσταση μεταξύ των μαζών τη χρονική στιγμή $t_2 = 5s$.

Λύση:



Μέχρι τα 3s οι μάζες κινούνται μαζί με $F = m_{ολ} \cdot \alpha \Rightarrow \alpha = \dfrac{F}{m_1 + m_2} \Rightarrow \alpha = \dfrac{8N}{4kg} = 2m/s^2$ και ταχύτητα $\upsilon_1 = \upsilon_2 = \alpha \cdot t_1 \Rightarrow \upsilon_1 = \upsilon_2 = 6\,m/s$.

Μετά από $t_1 = 3s$ η m_1 κινείται με επιτάχυνση: $F = m_1 \cdot \alpha' \Rightarrow \alpha' = \dfrac{F}{m_1} = 8\,m/s^2$ και η m_2 συνεχίζει με σταθερή ταχύτητα υ_2. Ισχύει: $\Delta t = t_2 - t_1 \Rightarrow \Delta t = 2s$.

Οπότε έχουμε: $d + x_2 = \ell + x_1 \Rightarrow d = \ell + \upsilon_1 \cdot \Delta t + \dfrac{1}{2} \cdot \alpha' \cdot \Delta t^2 - \upsilon_2 \cdot \Delta t \Rightarrow d = 20m$

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

Δυναμική στο επίπεδο

Σύνθεση δύο ομοεπιπέδων δυνάμεων.

Μέτρου: $F=\sqrt{F_1^2+F_2^2+2F_1F_2\text{συνφ}}$ Κατεύθυνσης: $\text{εφθ}=\dfrac{F_2\text{ημφ}}{F_1+F_2\text{συνφ}}$, $\theta=\widehat{\left(\vec{F}_1,\vec{F}\right)}$

Σύνθεση δύο καθέτων ομοεπιπέδων δυνάμεων.

Μέτρου: $F=\sqrt{F_1^2+F_2^2}$ Κατεύθυνσης: $\text{εφθ}=\dfrac{F_2}{F_1}$, $\theta=\widehat{\left(\vec{F}_1,\vec{F}\right)}$

Σύνθεση πολλών ομοεπιπέδων δυνάμεων.

Μέτρου: $\Sigma F=\sqrt{\Sigma F_x^{\,2}+\Sigma F_y^{\,2}}$ Κατεύθυνσης: $\text{εφθ}=\dfrac{\Sigma F_y}{\Sigma F_x}$, $\theta=\widehat{\left(\Sigma\vec{F}_x,\Sigma\vec{F}\right)}$

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

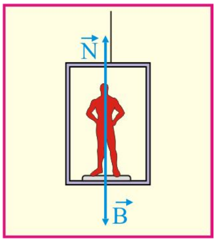
Ισορροπία ομοεπιπέδων δυνάμεων: $\Sigma F_x=0$ $\Sigma F_y=0$

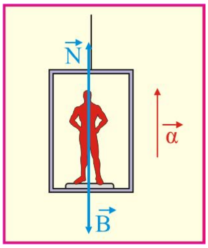
Τριβή ολίσθησης: $T=\mu\cdot N$

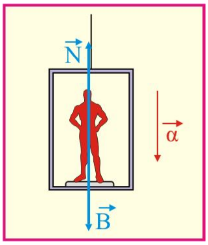
2ος Ν. Νεύτωνα σε διανυσματική και αλγεβρική μορφή

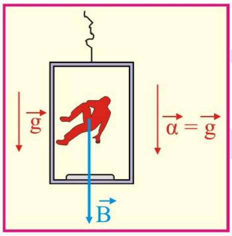
$\Sigma\vec{F}=m\cdot\vec{\alpha}$ $\Sigma F_x=m\cdot\alpha_x$ $\Sigma F_y=m\cdot\alpha_y$

Σχέση Δυνάμεων	Είδος Κίνησης στον άξονα xx΄	Είδος Κίνησης στον άξονα yy΄
$\Sigma F_x=0$ και $\Sigma F_y=0$	$\alpha_x=0$ Ισορροπεί	$\alpha_y=0$ Ισορροπεί
$\Sigma F_x\neq 0$ και $\Sigma F_y=0$	$\alpha_x=\dfrac{\Sigma F_x}{m}$ Επιταχύνεται	$\alpha_y=0$ Ισορροπεί
$\Sigma F_x=0$ και $\Sigma F_y\neq 0$	$\alpha_x=0$ Ισορροπεί	$\alpha_y=\dfrac{\Sigma F_y}{m}$ Επιταχύνεται
$\Sigma F_x\neq 0$ και $\Sigma F_y\neq 0$	$\alpha_x=\dfrac{\Sigma F_x}{m}$ Επιταχύνεται	$\alpha_y=\dfrac{\Sigma F_y}{m}$ Επιταχύνεται









ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΕΝΔΕΙΞΗΣ ΖΥΓΑΡΙΑΣ ΓΙΑ ΣΩΜΑ ΠΟΥ ΒΡΙΣΚΕΤΑΙ ΜΕΣΑ ΣΕ ΑΣΑΝΣΕΡ

α. Ασανσέρ ακίνητο ή ασανσέρ που κινείται με σταθερή ταχύτητα.

Ισχύει $\Sigma F = 0 \Rightarrow N - B = 0 \Rightarrow N = B$.
Η ζυγαριά θα δείχνει το βάρος του σώματος.

β. Ασανσέρ που ανεβαίνει με επιτάχυνση $\vec{\alpha}$ (ή κατεβαίνει με επιβράδυνση $\vec{\alpha}$).

Ισχύει: $\Sigma F = m\alpha \Rightarrow N - B = m\alpha \Rightarrow N - mg = m\alpha$

$\Rightarrow N = mg + m\alpha$

Η ένδειξη της ζυγαριάς είναι μεγαλύτερη από το βάρος του σώματος.

γ. Ασανσέρ που κατεβαίνει με επιτάχυνση $\vec{\alpha}$ (ή ανεβαίνει με επιβράδυνση $\vec{\alpha}$).

Ισχύει:

$$\Sigma F = m\alpha \Rightarrow B - N = m\alpha \Rightarrow N = mg - m\alpha = m(g - \alpha)$$

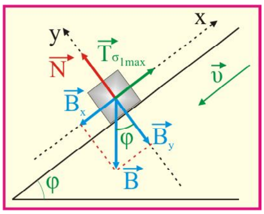
Η ένδειξη της ζυγαριάς είναι μικρότερη από το βάρος του σώματος.

Προσοχή!

Αν $\vec{\alpha} = \vec{g}$ τότε N=0. Το σώμα εκτελεί ελεύθερη πτώση, με την επίδραση μόνο του βάρους του

Εφαρμογή:

Να αποδειχθεί ότι ο συντελεστής τριβής όταν το σώμα ξεκινά να κινείται με σταθερή ταχύτητα είναι $\mu = \varepsilon\varphi\varphi$.



Είναι η ελάχιστη γωνία κεκλιμένου επιπέδου για την οποία ένα σώμα είναι έτοιμο να ολισθήσει με την επίδραση του βάρους του.

Τη στιγμή που για την γωνία φ το σώμα είναι έτοιμο να ολισθήσει η στατική τριβή έχει πάρει τη μέγιστη τιμή της $T_\sigma = T_{\sigma max} = \mu_\sigma N$

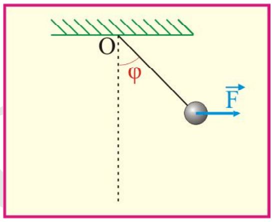
Θα ισχύει: $\Sigma F_x = 0$ (οριακά)

$B_x = T_{\sigma max} \Rightarrow mg\eta\mu\varphi = \mu_\sigma N \Rightarrow mg\eta\mu\varphi = \mu_\sigma mg\sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow \varepsilon\varphi\varphi = \mu_\sigma$

Η γωνία φ λέγεται γωνία τριβής.

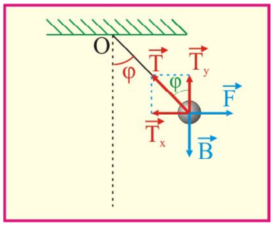
Δυναμική στο επίπεδο

12. **Το σώμα του διπλανού σχήματος ισορροπεί υπό την επίδραση της οριζόντιας δύναμης $\vec{F}$. Η μάζα του σώματος είναι $m = 1kg$ και η γωνία $\varphi = 60^o$. Να βρεθεί η τιμή της δύναμης $\vec{F}$ και η τάση του νήματος.**



Δίνεται: $g = 10\frac{m}{s^2}$

Λύση



$T_x = T \cdot ημφ$

$T_y = T \cdot συνφ$

$ΣF_x = 0 \Rightarrow F - T_x = 0 \Rightarrow F = T \cdot ημφ \quad (1)$

$ΣF_y = 0 \Rightarrow B - T_y = 0 \Rightarrow mg = T \cdot συνφ \quad (2)$

Διαιρούμε τις σχέσεις (1), (2):

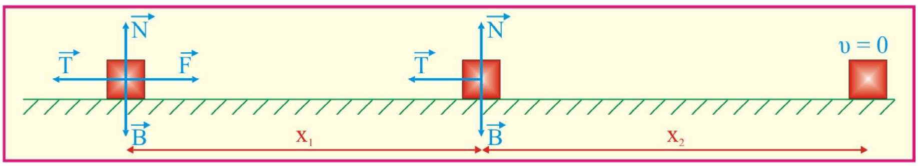
$$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \frac{F}{mg} = \frac{T \cdot ημφ}{T \cdot συνφ} \Rightarrow \frac{F}{m \cdot g} = εφφ \Rightarrow F = 10\sqrt{3}N$$

$$(1) \Rightarrow T = \frac{F}{ημφ} = \frac{10\sqrt{3}N}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 20N$$

13. **Σώμα μάζας $m = 1kg$ ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο που παρουσιάζει συντελεστή τριβής μ = 0,2. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ στο σώμα ασκείται σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου $F = 8N$ και το σώμα ξεκινάει. Αν η δύναμη καταργείται μετά από 5s, να βρεθούν ο συνολικός χρόνος κίνησης και το συνολικό διάστημα που διανύει το σώμα.**

Δίνεται $g = 10\frac{m}{s^2}$.

Λύση



Πριν καταργηθεί η δύναμη:

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N - B = 0 \Rightarrow N = mg = 10N$

$T = \mu \cdot N = 0,2 \cdot 10N = 2N$

$\Sigma F_x = m\alpha_1 \Rightarrow F - T = m\alpha_1 \Rightarrow \alpha_1 = \dfrac{F - T}{m} = 6\,m/s^2$

$\upsilon = \alpha_1 t_1 = 30\,m/s$

$x_1 = \dfrac{1}{2}\alpha_1 t_1^2 = 75m$

Μετά την κατάργηση της δύναμης: $\Sigma F_x = m\alpha_2 \Rightarrow T = m\alpha_2 \Rightarrow \alpha_2 = \dfrac{T}{m} = 2\,m/s^2$

$0 = \upsilon - \alpha_2 \cdot t_2 \Rightarrow t_2 = \dfrac{\upsilon}{\alpha_2} = 15\,s$

$x_2 = \upsilon \cdot t_2 - \dfrac{1}{2}\alpha_2 t_2^2 = 225\,m$

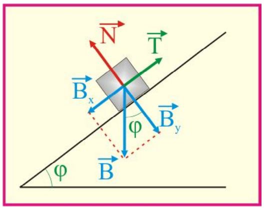
Συνεπώς ο συνολικός χρόνος είναι: $t = t_1 + t_2 = (5 + 15)s = 20s$

και το συνολικό διάστημα: $x = x_1 + x_2 = (75 + 225)m = 300m$

14. Σώμα αφήνεται να ολισθήσει σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης $\varphi = 30^o$. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης ανάμεσα στο σώμα και στο επίπεδο είναι $\mu = 0,2\sqrt{3}$. Να βρεθεί το διάστημα που έχει διανύσει το σώμα μέχρι τη στιγμή που η ταχύτητά του γίνεται 10m/s.

Δίνεται: $g = 10\dfrac{m}{s^2}$

Λύση



$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N - B_y = 0 \Rightarrow N = mg\sigma\upsilon\nu\varphi$

$T = \mu \cdot N = \mu \cdot m \cdot g \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi$

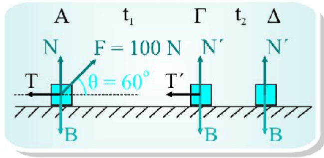
$\Sigma F_x = m\alpha \Rightarrow B_x - T = m\alpha \Rightarrow$

$\alpha = \left(10 \cdot \dfrac{1}{2} - 0,2\sqrt{3} \cdot 10\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) m/s^2 = 2\,m/s^2$

Όμως: $\upsilon = \alpha \cdot t \Rightarrow t = \dfrac{\upsilon}{\alpha} = \dfrac{10}{2}s = 5\,s$

και $s = \dfrac{1}{2}\alpha t^2 = \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5^2 \cdot m = 25m$

15. **Σώμα μάζας $m = 10\sqrt{3}kg$ κινείται με σταθερή ταχύτητα μέτρου $\upsilon = 20 m/s$ σε οριζόντιο δρόμο με την επίδραση δύναμης μέτρου $F = 100N$ που σχηματίζει $\theta = 60^o$ με το οριζόντιο επίπεδο, όπως στο σχήμα.**



Μετά από $t_1 = 10s$ η $\vec{F}$ καταργείται. Να βρεθούν:

α. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ σώματος και επιπέδου

β. Ο χρόνος που απαιτείται για να σταματήσει το σώμα, μετά την κατάργηση της δύναμης.

Δίνεται: $g = 10 m/s^2$

Λύση

α. Διαδρομή ΑΓ: Αναλύουμε την $\vec{F}$ σε δύο συνιστώσες $\vec{F}_x$ και $\vec{F}_y$ με μέτρα

$$F_x = F \cdot \text{συν}\theta = 100N \cdot \frac{1}{2} = 50N \text{ και } F_y = F \cdot \text{ημ}\theta = 100N \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3}N$$

Επειδή το σώμα κινείται με $\vec{\upsilon} = \text{σταθ.}$

Ισχύει: $\Sigma\vec{F}_x = \vec{0} \Rightarrow F_x - T = 0 \Rightarrow F_x = T \Rightarrow T = 50N$

Από την συνθήκη ισορροπίας στον κατακόρυφο άξονα έχουμε:

$\Sigma\vec{F}_y = \vec{0} \Rightarrow F_y + N - B = 0 \Rightarrow$

$N = B - F_y \Rightarrow N = mg - F \cdot \text{ημ}\theta \Rightarrow N = 50\sqrt{3}N$

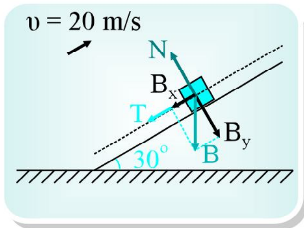
$$T = \mu N \Rightarrow \mu = \frac{T}{N} = \frac{50N}{50\sqrt{3}N} \Rightarrow \mu = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

β. Μετά την κατάργηση της $\vec{F}$ η μόνη οριζόντια δύναμη είναι η τριβή, η οποία επιβραδύνει και τελικά σταματά το σώμα

$$\Sigma\vec{F}_x = m\vec{a} \Rightarrow -T' = m(-\alpha) \Rightarrow \alpha = \frac{T'}{m} \Rightarrow \alpha = \frac{10\sqrt{3}}{3} m/s^2$$

όπου $T' = \mu \cdot N' \Rightarrow T' = \mu \cdot mg \Rightarrow T' = 100N$ και $t_2 = \frac{\upsilon_0}{\alpha} \Rightarrow t_2 = 2\sqrt{3}\,s$

16. **Σώμα εκτοξεύεται από τη βάση κεκλιμένου επιπέδου κλίσης $\theta = 30^o$ με $\upsilon = 20 m/s$. Αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ σώματος και κεκλιμένου επιπέδου είναι $\mu = \frac{\sqrt{3}}{5}$ να βρεθούν:**



α. Η απόσταση που διανύει στο κεκλιμένο επίπεδο μέχρι να σταματήσει στιγμιαία.

β. Να εξεταστεί αν θα επιστρέψει στη βάση του κεκλιμένου και αν ναι , σε πόσο χρόνο και με ποια ταχύτητα.

(Δίνεται ο συντελεστής οριακής τριβής σώματος και κεκλιμένου επιπέδου $\mu' = \frac{\sqrt{3}}{4}$ και $g = 10 m/s^2$).

Λύση

α. Η απόσταση που διανύει το σώμα μπορεί να βρεθεί ή με εφαρμογή του νόμου Νεύτωνα ή με το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας.

Γνωρίζουμε επίσης ότι: $B_y = mg\sigma\upsilon\nu\theta$, $B_x = mg\eta\mu\theta$

Οι δυνάμεις ασκούνται στη διεύθυνση κίνησης του σώματος είναι η $\vec{B}_x$ και $\vec{T}$ που επιβραδύνουν το σώμα, οπότε για το διάστημα που διανύει μέχρι να σταματήσει ισχύει: $s = \dfrac{\upsilon_0^2}{2\alpha}$ (1).

$$\left(\begin{array}{r} \text{Ισχύει στον } yy'{:}\ \Sigma\vec{F}_y = 0 \Rightarrow N = B_y = mg\sigma\upsilon\nu\theta \\ T = \mu N \Rightarrow T = \mu mg\sigma\upsilon\nu\theta \end{array}\right)$$

Ισχύει: $\Sigma\vec{F}_x = m\vec{\alpha} \Rightarrow -B_x - T = m(-\alpha) \Rightarrow mg\eta\mu\theta + \mu \cdot mg\sigma\upsilon\nu\theta = m\alpha \Rightarrow \alpha = 8\,m/s^2$

Από την (1) έχουμε: $s = \dfrac{\upsilon_0^2}{2\alpha} \Rightarrow S = 25m$.

β. Για να εξετάσουμε αν θα επιστρέψει στη βάση, σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα. Για να κινηθεί προς τα κάτω θα πρέπει:

$B_x > T_{\sigma\tau} \Rightarrow mg\eta\mu\theta > \mu_{\sigma\tau} mg\sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow \eta\mu\theta > \mu_{\sigma\tau}\sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow \dfrac{1}{2} > \dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{2} > \dfrac{3}{8}$ που ισχύει, άρα το σώμα επιστρέφει.

Έχουμε: $\Sigma F_x = m\alpha' \Rightarrow B_x - T = m\alpha' \Rightarrow \alpha' = \dfrac{B_x - T}{m} \Rightarrow \alpha' = 2\,m/s^2$

$S = \dfrac{1}{2}\alpha t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\dfrac{2\cdot S}{\alpha}} = \sqrt{\dfrac{2\cdot 25m}{2m/s^2}} \Rightarrow t = 5s$ και $\upsilon_{\varepsilon\pi} = \alpha' t \Rightarrow \upsilon_{\varepsilon\pi} = 10\,m/s$

17. Όταν το σύστημα του σχήματος αφεθεί ελεύθερο να βρεθούν:

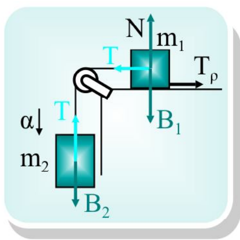
α. Το διάστημα που διανύει η m_1 σε 2s

β. Η ταχύτητα του m_2 σε 2s

γ. Η τάση του νήματος

Δίνονται: $m_1 = m_2 = 5kg$, $g = 10\,m/s^2$ και ο συντελεστής τριβής ολίσθησης του m_1 με το δάπεδο $\mu = 0,25$.

(Η τροχαλία θεωρείται αβαρής)



Λύση

Εφαρμόζουμε το 2ο Νόμο του Νεύτωνα για κάθε σώμα χωριστά με τις δυνάμεις που φαίνονται στο σχήμα: για το m_1: $\Sigma F = m_1\alpha \Rightarrow T - T_\rho = m_1\alpha \Rightarrow T - \mu m_1 g = m_1\alpha$ (1)

για το m_2: $\Sigma F = m_2\alpha \Rightarrow B_2 - T = m_2\alpha \Rightarrow m_2 g - T = m_2\alpha$ (2)

$$(1)+(2) \Rightarrow m_2 g - \mu m_1 g = m_1 \alpha + m_2 \alpha \Rightarrow \alpha = 3,75\,m/s^2$$

α. Για το διάστημα που διανύει το m_1 σε $t = 2s$ έχουμε: $S_1 = \frac{1}{2}\alpha t^2 \Rightarrow S_1 = 7,5\,m$

β. $\upsilon_2 = \alpha \cdot t \Rightarrow \upsilon_2 = 7,5\,m/s$

γ. $(1) \Rightarrow T = m_1 \alpha + \mu m_1 g \Rightarrow T = 31,25N$

(Επειδή τα δύο σώματα συνδέονται με τεντωμένο νήμα, κάθε στιγμή έχουν την ίδια ταχύτητα, οπότε και οι μεταβολές των ταχυτήτων τους στη μονάδα του χρόνου είναι ίσες, άρα έχουν και ίσες επιταχύνσεις $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$)

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ
Διατήρηση της μηχανικής ενέργειας
Έργο σταθερής δύναμης: $W_F = F \cdot x \cdot συνθ$
Θ.Μ.Κ.Ε.: $K_{τελ.} - K_{αρχ} = W_{F(ολ)}$
Δυναμική βαρυτική ενέργεια: $U = m \cdot g \cdot h$
Έργο δύναμης αλληλεπιδράσεων: $W_{F(1\to 2)} = -\Delta U = -(U_2 - U_1) = U_1 - U_2$
Μηχανική ενέργεια: $E = K + U = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon^2 + m \cdot g \cdot h$
Ισχύς: $P = \frac{W}{t}$. Αν $\vec{F} = σταθ.$, $\vec{\upsilon} = σταθ.$ και ομόρροπα τότε: $P = F \cdot \upsilon$

Διατήρηση της μηχανικής ενέργειας

18. **Σώμα μάζας 15kg σύρεται πάνω σε τραχύ οριζόντιο δάπεδο από μια σταθερή δύναμη F = 70N που ασκείται με γωνία 30° πάνω από το οριζόντιο επίπεδο. Το σώμα μετατοπίζεται κατά 5m και ο συντελεστής τριβής ολίσθησης είναι 0,3. Να βρείτε:**

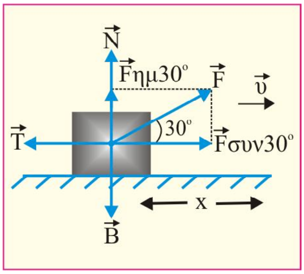
α. Το έργο της $\vec{F}$,
β. το έργο της τριβής,
γ. το έργο της κάθετης αντίδρασης,
δ. το έργο του βάρους,
ε. το συνολικό έργο
στ. αν το σώμα ξεκινά από την ηρεμία, ποια θα είναι η ταχύτητά του στο τέλος των 5m;

Δίνεται $g = 10\dfrac{m}{s^2}$

Λύση

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N + F\eta\mu30^o - B = 0 \Leftrightarrow N = B - F\eta\mu30^o \Leftrightarrow N = 115N$

Άρα $T = \mu \cdot N = 0,3 \cdot 115N = 34,5N$



α. Το $W_F = F\sigma\upsilon\nu45^o \cdot x = 70N\dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot 5m = 175\sqrt{3}\,J$

β. Το $W_T = -T \cdot x = -34,5N \cdot 5m = -172,5\,J$

γ. Το $W_N = 0$ γιατί η $\vec{N}$ είναι κάθετη στην μετατόπιση

δ. Το $W_B = 0$ γιατί το $\vec{B}$ είναι κάθετο στην μετατόπιση

ε. Το $W_{o\lambda} = W_F + W_T + W_N + W_B = 130,6\,J$

στ. Εφαρμόζω το Θ.Μ.Κ.Ε.: $K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_{o\lambda} \Rightarrow \dfrac{1}{2}m\upsilon^2 = W_{o\lambda} \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\dfrac{2W_{o\lambda}}{m}} = 4,17\dfrac{m}{s}$

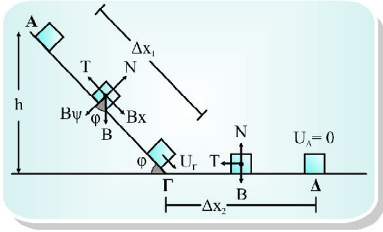
19. **Σώμα μάζας m = 1kg αφήνεται στο σημείο Α κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσης φ = 60° που βρίσκεται σε ύψος h = 1m πάνω από το οριζόντιο επίπεδο. Όταν το σώμα φθάνει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου συνεχίζει σε οριζόντιο επίπεδο, μέχρι να σταματήσει.**

Αν το σώμα παρουσιάζει τον ίδιο συντελεστή τριβής και στα δύο επίπεδα $\mu = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ να βρεθούν:

α. Η ταχύτητα του σώματος στη βάση Γ του κεκλιμένου επιπέδου.
β. Η μετατόπιση του σώματος πάνω στο οριζόντιο επίπεδο.
γ. Τις μετατροπές ενέργειας που έχουμε κατά τη διάρκεια της κίνησης.
δ. Το ποσοστό της αρχικής δυναμικής ενέργειας που γίνεται θερμότητα, στην κίνηση πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο.

Λύση

$B_x = B\eta\mu\varphi = m \cdot g \cdot \eta\mu\varphi$, $B_y = B\sigma\upsilon\nu\varphi = m \cdot g \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi$



$$\eta\mu\varphi = \frac{h}{\Delta x_1} \Rightarrow \Delta x_1 = \frac{h}{\eta\mu\varphi}$$

α. $\Theta.M.K.E.\ A \rightarrow \Gamma : \Sigma W_F = \Delta K \Rightarrow$

$$W_{B_x} + W_{B_y} + W_T + W_N = K_\Gamma - K_A \Rightarrow$$

$$W_{B_x} + W_T = K_\Gamma \Rightarrow B_x \cdot \Delta x_1 - T_1 \cdot \Delta x_1 = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon_\Gamma^2 \Rightarrow$$

$$m \cdot g \cdot \eta\mu\varphi \frac{h}{\eta\mu\varphi} - \mu \cdot m \cdot g \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \frac{h}{\eta\mu\varphi} = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon_\Gamma^2 \Rightarrow$$

$$\upsilon_\Gamma = \sqrt{2(g \cdot h - \mu \cdot g \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \frac{h}{\eta\mu\varphi})} \Rightarrow \upsilon_\Gamma = \sqrt{2g \cdot h\left(1 - \mu \frac{\sigma\upsilon\nu\varphi}{\eta\mu\varphi}\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon_\Gamma = \sqrt{15} m/s$$

$W_N = 0$, $W_{B_y} = 0$ και $K_A = 0$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N - B_y = 0 \Rightarrow N = B_y \Rightarrow N = B\sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow N = m \cdot g \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi$$

Πρέπει να ξέρεις:

- ότι εάν είναι άγνωστο ένα από τα υ, υ_0, ΣF, x χρησιμοποιούμε το Θ.Μ.Κ.Ε.

β. Στο οριζόντιο επίπεδο ισχύει: $K_\Delta = 0$ και $W_B = 0$,

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N - B = 0 \Rightarrow N = B \Rightarrow N = m \cdot g$$

$\Theta.M.K.E.\ \Gamma \rightarrow \Delta :\ \Sigma W_F = \Delta K \Rightarrow$

$$W_B + W_N + W_T = K_\Delta - K_\Gamma \Rightarrow \Delta x_2 = \frac{\upsilon_\Gamma^2}{2\mu \cdot g} \Rightarrow \Delta x_2 = \sqrt{3} m$$

γ. Η αρχική Δυναμική ενέργεια στο Α, μέσω του έργου του βάρους, μετατρέπεται σε κινητική στο Γ και μέσω του έργου της τριβής μετατρέπεται και σε θερμότητα μέχρι το Γ. Μετά, όλη η κινητική στο Γ θα μετατραπεί, μέσω του έργου της τριβής, σε θερμότητα έως το Δ.

δ. $U_\beta = m \cdot g \cdot h = 10J$, $K = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon_\Gamma^2 \Rightarrow K = 2,5J$

άρα $Q = U_\beta - K = 10J - 2,5J = 7,5\ J$, επομένως: $\frac{Q}{U_\beta} = \frac{7,5\ J}{10\ J} = 0,75$ ή 75%

20. **Σώμα μάζας m = 4kg που ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο δέχεται δύναμη F = 20N υπό γωνία φ, ως προς αυτό, και αφού το μετατοπίσει κατά $\Delta x_1 = 5m$ παύει να ασκείται. Το σώμα συνεχίζει να κινείται και σταματάει λόγω τριβών. Αν ο συντελεστής μεταξύ σώματος και επιπέδου είναι μ = 0,2, να βρεθούν:**
α. η ταχύτητα του σώματος όταν παύει να ασκείται η δύναμη

β. η συνολική μετατόπιση του σώματος.
Δίνεται: ημφ = 0,8, συνφ = 0,6, $\upsilon_0 = 0$

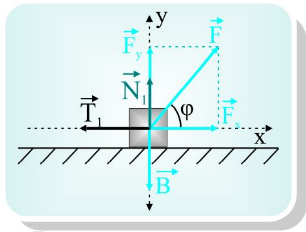

Πρέπει να ξέρεις:

- ότι εάν είναι άγνωστο ένα από τα υ, υ_0, ΣF, x χρησιμοποιούμε το Θ.Μ.Κ.Ε.

Λύση

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_1 + F_y - B = 0 \Rightarrow N_1 = B - F_y \Rightarrow$$

$$N_1 = m \cdot g - F\eta\mu\varphi \Rightarrow T_1 = \mu N_1 = \mu\left(m \cdot g - f\eta\mu\varphi\right)$$



α. Θ.Μ.Κ.Ε. $\Sigma W_f = \Delta K$

$$WF_x + WF_y + W_B + W_N + W_\Gamma = K_\Gamma - K_A$$

$$F\sigma\upsilon\nu\varphi \cdot \Delta x_1 - \mu\left(m \cdot g - F\eta\mu\varphi\right)\Delta x_1 = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon^2 \Rightarrow \upsilon = 3\sqrt{2} m/s$$

β. $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_2 - B = 0 \Rightarrow N_2 = B \Rightarrow N_2 = m \cdot g$

$T_2 = \mu N_2 = \mu m \cdot g$. Επειδή $\Sigma W_F = \Delta K$

$$W_{T_2} + W_{N_2} + W_B = K_\Delta - K_\Gamma \Rightarrow -\mu \cdot m \cdot g \cdot \Delta x_2 = -\frac{1}{2} m \cdot \upsilon^2$$

$$\Delta x_2 = \frac{\upsilon^2}{2\mu \cdot g} = 4,5m \text{ . } \Delta x_{o\lambda} = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 5m + 4,5m = 9,5m$$