ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΗΝ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σελίδα 142

Α2. Θεωρία σελίδα 87

Α3. Θεωρία σελίδα 150-151

Α4. Λ-Λ-Σ-Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έστω c το πλάτος των κλάσεων με κλάσεις τις: $[10,10+c),[10+c,10+2c),[10+2c,10+3c),[10+3c,10+4c)$. Ισχύει ότι: $x_4=\dfrac{10+3c+10+4c}{2}\Leftrightarrow 160=20+7c\Leftrightarrow c=20$

Β2. Έχουμε ότι $f_4=2f_3\,(1)$. Ακόμα $\delta=60$ και αφού οι παρατηρήσεις κατανέμονται με όμοιο τρόπο έχουμε

$$f_1+f_2+\frac{f_3}{2}=\frac{f_3}{2}+f_4\xRightarrow{(1)}2f_1+2f_2=4f_3\Leftrightarrow 2f_3=f_1+f_2\,(2)$$

Ακόμα $\bar{x}=58\Rightarrow 20f_1+40f_2+60f_3+80f_4=58\xRightarrow{(1)}2f_1+4f_2+6f_3+8\cdot 2f_3=5{,}8\Rightarrow$

$\Rightarrow f_1+2f_2+11f_3=2{,}9\,(3)$ Τέλος $f_1+f_2+f_3+f_4=1\Leftrightarrow 2f_3+f_3+2f_3=1\Leftrightarrow f_3=0{,}2$.

Άρα $(1)\Rightarrow f_4=0{,}4$ και $(2)\Rightarrow f_1+f_2=0{,}4$, ενώ $(3)\Rightarrow f_1+2f_2=2{,}9-11\cdot 0{,}2\Leftrightarrow f_1+2f_2=0{,}7$. Άρα $f_2=0{,}3$ και $f_1=0{,}1$

Κλάσεις $[\ldots,\ldots)$	x_i	f_i
10-30	20	0,1
30-50	40	0,3

50-70	60	0,2
70-90	80	0,4
ΣΥΝΟΛΟ	-	1

Β3. Έχουμε ότι $\nu_1 = 0,1\nu$, $\nu_2 = 0,3\nu$, $\nu_3 = 0,2\nu$ και $\nu_4 = 0,4\nu$. Άρα

$$\bar{x}_1 = \frac{x_1\nu_1 + x_2\nu_2 + x_3\nu_3}{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3} = \frac{20 \cdot 0,1\nu + 40 \cdot 0,3\nu + 60 \cdot 0,2\nu}{0,1\nu + 0,3\nu + 0,2\nu} = \frac{2\nu + 12\nu + 12\nu}{0,6\nu} = \frac{26\nu}{0,6\nu} = \frac{130}{3}$$

Β4. Έχουμε ότι $\bar{x} + 2s = 70\,(1)$ και $\bar{x} - s = 55\,(2)$ Με την λύση του συστήματος $(1),(2)$ έχουμε $\bar{x} = 60$ και $s = 5$. Ακόμα ο συντελεστής μεταβολής είναι $CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{5}{60} = \frac{1}{12} < \frac{1}{10}$. Άρα το δείγμα είναι ομοιογενές.

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Γ1. Έχουμε $f'(x) = e^x + x \cdot e^x = (x+1) \cdot e^x$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow (x+1) \cdot e^x > 0 \xRightarrow{e^x > 0} x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	Γν. φθίνουσα		Γν. αύξουσα

Γ2. $P(A) = -\left(\frac{2}{3} - 1\right) = \frac{1}{3}$ και $P(B) = \frac{-f(-1)\cdot e}{2} = \frac{e^{-1}\cdot e}{2} = \frac{1}{2}$

Γ3. $P(A-B) = P(A) - P(A\cap B) \Leftrightarrow \frac{1}{12} = \frac{1}{3} - P(A\cap B) \Leftrightarrow P(A\cap B) = \frac{1}{4}$

α) $P(B-A) = P(B) - P(A\cap B) \Leftrightarrow P(B-A) = \frac{1}{4}$

β) $P(A\cup B') = P(A) + P(B') - P(A\cap B') = P(A) + 1 - P(B) - P(A-B) = \frac{3}{4}$

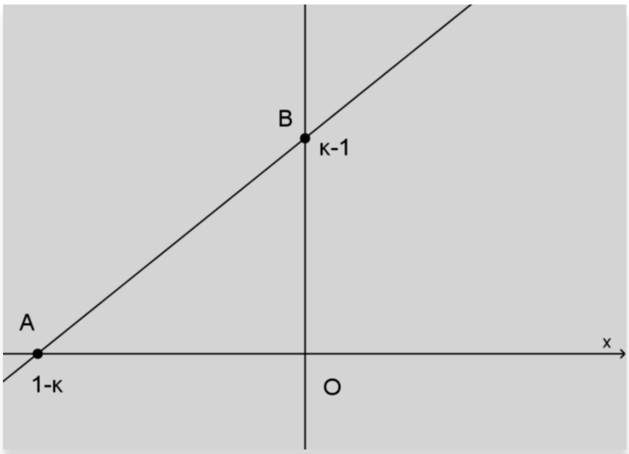
ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έχουμε $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$ με εξίσωση εφαπτομένης $y - f(1) = f'(1)\cdot(x-1)$ όπου $f(1) = \kappa$ και $f'(1) = 1$. Άρα $y - \kappa = x - 1 \Leftrightarrow y = x + \kappa - 1$ με $\kappa > 1$. Η ευθεία τέμνει τον άξονα χ΄χ στο σημείο $\mathrm{A}(1-\kappa, 0)$ και τον y'y στο $\mathrm{B}(0, \kappa-1)$. Επομένως το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ θα είναι ίσο με

$$\mathrm{E} = (\mathrm{OAB}) = \frac{1}{2}\cdot(\mathrm{OA})\cdot(\mathrm{OB}) = \frac{1}{2}(\kappa-1)\cdot(\kappa-1) = \frac{1}{2}\cdot(\kappa-1)^2$$

Ακόμα

$$\mathrm{E} < 2 \Leftrightarrow |\kappa - 1| < 2 \Leftrightarrow -2 < \kappa - 1 < 2 \Leftrightarrow -3 < \kappa < 3 \overset{\kappa\in\mathbb{Z}}{\underset{\kappa>1}{\Longrightarrow}} \kappa = 2$$



ΟΡΟΣΗΜΟ

Δ2. Έχουμε ότι $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[\dfrac{1}{e},e\right]$ έχουμε:

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	-
$f(x)$	Γν. αύξουσα		Γν. φθίνουσα

$$\frac{1}{e}<\alpha<\beta<\gamma<e\Rightarrow f\left(\frac{1}{e}\right)<f(\alpha)<f(\beta)<f(\gamma)<f(e)$$

$$R=f(e)-f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}+2-\left(\frac{-1}{\frac{1}{e}}+2\right)=\frac{e^2+1}{e}$$

$$\bar{x}=\frac{f\left(\frac{1}{e}\right)+f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)+f(e)}{5}\Rightarrow\bar{x}=\frac{\frac{\ln\alpha}{\alpha}+\frac{\ln\beta}{\beta}+\frac{\ln\gamma}{\gamma}+\frac{1}{e}-e+10}{5}\Rightarrow$$

$$\bar{x}=\frac{\ln\sqrt[\alpha]{\alpha}+\ln\sqrt[\beta]{\beta}+\ln\sqrt[\gamma]{\gamma}+\frac{1}{e}-e+10}{5}\Rightarrow\bar{x}=\frac{\ln\left(\sqrt[\alpha]{\alpha}\cdot\sqrt[\beta]{\beta}\cdot\sqrt[\gamma]{\gamma}\right)+\frac{1}{e}-e+10}{5}\Rightarrow$$

$$\bar{x}=\frac{18+\frac{1}{e}-e}{5}=\frac{18e+1-e^2}{5e}.$$

Δ3 Έχουμε ότι

$$g(x)=x\cdot\left(\frac{\ln x}{x}+2\right)-5\ln x\Rightarrow g(x)=\ln x+2x-5\ln x\Rightarrow g(x)=2x-4\ln x$$

$$g'(x)=2-\frac{4}{x}\Rightarrow g'(x)=\frac{2x-4}{x}$$

ΟΡΟΣΗΜΟ

x	0	2	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	Γν. Φθίνουσα		Γν. αύξουσα

Επομένως

$$g(x)\geq g(2)\Leftrightarrow 2x-4\ln x\geq 4-4\ln 2\Leftrightarrow \ln e^{2x}-\ln x^4\geq \ln e^4-\ln 16\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{e^{2x}}{x^4}\right)\geq \ln\left(\frac{e^4}{16}\right)\Leftrightarrow \frac{e^{2x}}{x^4}\geq \frac{e^4}{16}\Leftrightarrow 16e^{2x-4}\geq x^4$$

Δ4. Πρέπει

$$g'(x)=\varepsilon\varphi 45^0\Leftrightarrow \frac{2x-4}{x}=1\Leftrightarrow 2x-4=x\Leftrightarrow x=4$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι

$$y-g(4)=g'(4)\cdot(x-4)\Leftrightarrow y-(8-4\ln 4)=x-4\Leftrightarrow y=x+4-4\ln 4$$

ΟΡΟΣΗΜΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

ΚΑΤΣΙΜΠΡΑΣ ΕΥΘΥΜΗΣ

ΟΡΟΣΗΜΟ