ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σελίδα 149

Α2. Θεωρία σελίδα 87

Α3. Θεωρία σελίδα 151

Α4. Λ-Λ-Λ-Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έχουμε ότι $f'(x)=e^{-x}\cdot(6x-24)$ όπου $f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 4$

x	$-\infty$ 4	$+\infty$
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	Γνησίως φθίνουσα	Γνησίως αύξουσα

Ο.Ε

Β2. Έχουμε ότι $P(A)=\frac{1}{x_1}=\frac{1}{4}$ και

$$P(B)=\frac{-2\cdot f(4)\cdot e^4}{15}=\frac{-2\cdot e^{-4}\cdot(-6)\cdot e^4}{15}=\frac{4}{5}$$

Β3. Έστω ότι τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ασυμβίβαστα. Τότε θα ισχύει ο απλός προσθετικός νόμος $P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{21}{20}>1$ άτοπο, επομένως τα Α και Β δεν είναι ασυμβίβαστα.

ΑΓ.ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ 11 -- ΠΕΙΡΑΙΑΣ -- 18532 -- ΤΗΛ. 210-4224752, 4223687

Β4. Έχουμε ότι

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Leftrightarrow$$
$$\frac{17}{20}=\frac{21}{2}-P(A\cap B)\Leftrightarrow P(A\cap B)=\frac{1}{5}$$

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Γ1. Οι κλάσεις είναι της μορφής
$[\alpha,\alpha+c),[\alpha+c,\alpha+2c),[\alpha+2c,\alpha+3c),[\alpha+3c,\alpha+4c)$

Όπου $\alpha+3c=13\ (1)$ και $\dfrac{\alpha+3c+\alpha+4c}{2}=19\Leftrightarrow 2\alpha+7c=38\ (2)$

Λύνοντας το σύστημα $(1),(2)$ έχουμε ότι $c=4$ και $\alpha=5$

Γ2. ‘Έχουμε ότι $f_1+f_2+f_3+f_4=1\Leftrightarrow 0{,}1+f_2+0{,}3+2f_2=1\Leftrightarrow f_2=0{,}2$

Επομένως $f_4=2f_2=0{,}4$

Γ3. Για την μέση τιμή έχουμε:

$$\bar{x}=\sum_{i=1}^{4}x_i\cdot f_i=7\cdot 0{,}1+11\cdot 0{,}2+15\cdot 0{,}3+19\cdot 0{,}4=15$$

Γ4. Έχουμε ότι $s^2=\dfrac{1}{\nu}\cdot\left\{\sum_{i=1}^{k}x_i^2\cdot\nu_i-\dfrac{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot\nu_i\right)^2}{\nu}\right\}$

$$=\sum_{i=1}^{k}x_i^2\cdot f_i-\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot\nu_i\right)^2}{\nu^2}=\sum_{i=1}^{k}x_i^2\cdot f_i-\left(\bar{x}\right)^2=$$
$=7^2\cdot 0{,}1+11^2\cdot 0{,}2+15^2\cdot 0{,}3+19^2\cdot 0{,}4-15^2=16$. Άρα $s=4$

Γ5. Το 2,5% των μαθητών έχουν τουλάχιστον 9 απουσίες επομένως $\bar{x}_1+2s_1=9(1)$ και αφού το 16% των μαθητών έχουν το πολύ 6 απουσίες θα έχουμε ότι $\bar{x}_1-s_1=6(2)$

Άρα $(1)-(2)\Rightarrow 3s_1=3\Leftrightarrow s_1=1$ και $(1)\Rightarrow \bar{x}_1=7$. Άρα $CV=\frac{s_1}{\bar{x}_1}=\frac{1}{7}>\frac{1}{10}$.

Το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. Έχουμε ότι $P(\omega_1)=f(\omega_1)=f(1)-\frac{3}{4}=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$

$P(\omega_2)=f(\omega_2)=f(2)-\frac{3}{4}=\frac{4}{5}-\frac{3}{4}=\frac{1}{20}$ και

$$P(\omega_3)=\frac{1}{8}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{2\cdot(1-x)\cdot(1+x)\cdot(x^2+1)}{(1-x)\cdot(x^2+1)^2}=\frac{1}{4}$$

Ακόμα $P(\omega_1)+P(\omega_2)+P(\omega_3)+P(\omega_4)=1\Leftrightarrow \frac{1}{4}+\frac{1}{20}+\frac{1}{4}+P(\omega_4)=1\Leftrightarrow$

$P(\omega_4)=\frac{9}{20}$

Δ2. Για το ενδεχόμενο Α έχουμε: $(\omega^2+1)\cdot(2\omega-4)\cdot\frac{2\omega}{\omega^2+1}-2(\omega^2-4)=0\Leftrightarrow$

$(\omega-2)\cdot(2\omega-4)=0\Leftrightarrow \omega=2$ Επομένως $\mathrm{A}=\{2\}$ με

$P(A)=P(2)=P(\omega_2)=\frac{1}{20}$

Για το ενδεχόμενο Β και την μονοτονία της συνάρτησης f έχουμε

x	$-\infty$ $\quad -1$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	+	-
$f(x)$	Γν. φθίνουσα	Γν. αυξουσα	Γν. φθίνουσα

T.E. T.M.

Άρα $\mu = 1$ και $f(v)+3=-1+3=2$ επομένως $B=\{1,2\}$ με

$$P(B)=P(1)+P(2)=P(\omega_1)+P(\omega_2)=\frac{3}{10}$$

Για το ενδεχόμενο Γ έχουμε την εξίσωση $x^2-\omega x+1=0$ που έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες, άρα $\Delta>0 \Leftrightarrow \omega^2-4>0 \Leftrightarrow |\omega|>2 \Leftrightarrow \omega>2$ ή $\omega<-2$.

Επομένως $\Gamma=\{\omega_3,\omega_4\}$ με $P(\Gamma)=P(\omega_3)+P(\omega_4)=\frac{1}{4}+\frac{9}{20}=\frac{7}{10}$ και

$$P(B-\Gamma)=P(B)-P(B\cap\Gamma)=P(B)=\frac{3}{10}$$

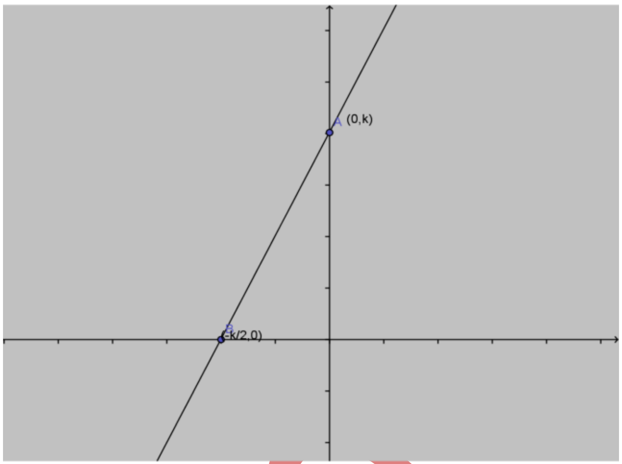
Δ3. Πρέπει $g'(x)=2 \Leftrightarrow f'(x)=2 \Leftrightarrow \dfrac{2x^2+2-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}=2 \Leftrightarrow 2\cdot(1-x^2)=2(x^2+1)^2 \Leftrightarrow x^4+3x^2=0 \Leftrightarrow x=0$$

Επομένως $g(0)=k$ και η εξίσωση εφαπτομένης θα είναι

$$y-g(0)=g'(0)\cdot(x-0) \Leftrightarrow y-k=2x \Leftrightarrow y=2x+k$$

Δ4. Η ευθεία $y=2x+k$ τέμνει τον άξονα χ΄χ στο σημείο $B\left(-\frac{k}{2},0\right)$ και τον ψ΄ψ στο σημείο $A(0,k)$ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



Το εμβαδόν του τριγώνου θα είναι $(OAB)=\frac{1}{2}\cdot\left|-\frac{k}{2}\right|\cdot|k|=\frac{k^2}{4}$ με

$(OAB)<1\Leftrightarrow\frac{k^2}{4}<1\Leftrightarrow k^2<4\Leftrightarrow -2<k<2\xrightarrow{k\in\mathbb{N}}k=1$. Άρα $y=2x+1$

Δ5. Τα σημεία $M_k(\omega_\kappa,y_k)$ ανήκουν στην ευθεία $y=2x+1$ επομένως $y_k=2\omega_k+1$. Άρα $y_1=2\omega_1+1=3$, $y_2=2\omega_2+1=5$, $y_3=2\omega_3+1$ και $y_4=2\omega_4+1$. Έχουμε ότι $\omega_1<\omega_2<\omega_3<\omega_4$ και $y_1<y_2<y_3<y_4$

Έχουμε $\frac{4}{5}\delta_{\omega_i}+2=\omega_4\Leftrightarrow\frac{4}{5}\cdot\frac{2+\omega_3}{2}+2=\omega_4\Leftrightarrow 2\omega_3-5\omega_4=-14\,(1)$

Ακόμα $R_{y_i}=6\Leftrightarrow y_4-3=6\Leftrightarrow y_4=9\Leftrightarrow 2\omega_4+1=9\Leftrightarrow\omega_4=4$

$(1)\xrightarrow{\omega_4=4}2\omega_3-20=-14\Leftrightarrow\omega_3=3$

ΟΡΟΣΗΜΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

ΚΑΤΣΙΜΠΡΑΣ ΕΥΘΥΜΗΣ