

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Να διατυπώσετε τον αξιωματικό ορισμό της πιθανότητας. (5 μονάδες)

A2. Να διατυπώσετε τον ορισμό της διαμέσου των παρατηρήσεων μιας μεταβλητής X (5 μονάδες)

A3. Να αποδείξετε ότι $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (11 μονάδες)

A4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος:

i) Ένα δείγμα των τιμών μιας μεταβλητής X χαρακτηρίζεται ομοιογενές όταν ξεπερνά το 10%

ii) Δύο ενδεχόμενα A και B του ίδιου δειγματικού χώρου είναι ασυμβίβαστα όταν $A \cap B \neq \emptyset$

iii) Για τα ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου Ω είναι $A \subseteq A \cap B$.

iv) Ισχύει ότι $(\ln x)' = -\frac{1}{x}$ για $x > 0$ (4 μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-x} \cdot (18 - 6x)$ και τα ενδεχόμενα ενός

δειγματικού χώρου Ω με $P(A) = \frac{1}{x_1}$ και $P(B) = \frac{-2f(x_1) \cdot e^4}{15}$ με x_1 η θέση

όπου η f παρουσιάζει ακρότατο.

B1. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

(8 μονάδες)

B2. Να αποδείξετε ότι $P(A) = \frac{1}{4}$ και $P(B) = \frac{4}{5}$ (6 μονάδες)

B3. Να αποδείξετε ότι τα ενδεχόμενα A και B δεν είναι ασυμβίβαστα
(6 μονάδες)

B4. Αν $P(A \cup B) = \frac{17}{20}$ να βρεθεί η πιθανότητα να πραγματοποιούνται
συγχρόνως τα A και B. (5 μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Οι απουσίες n μαθητών της Γ΄ Λυκείου ενός ενιαίου Λυκείου κατά τους μήνες Σεπτέμβριο – Οκτώβριο – Νοέμβριο – Δεκέμβριο του έτους 2013 έχουν ομαδοποιηθεί σε τέσσερις κλάσεις ίσου πλάτους και εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα σχετικών συχνοτήτων:

Απουσίες μαθητών [.....)	Κέντρο κλάσης x_i	Σχετική συχνότητα f_i
-		0,1
-13		
-		0,3
-	19	
Σύνολο	-	1

Αν επιπλέον δίνεται ότι η σχετική συχνότητα της τέταρτης κλάσης f_4 είναι διπλάσια της σχετικής συχνότητας της δεύτερης κλάσης f_2 , τότε:

Γ1. Να βρείτε το πλάτος c των κλάσεων. (5 μονάδες)

Γ2. Να μεταφέρετε τον παρακάτω πίνακα σχετικών συχνοτήτων στο τετράδιο σας και να συμπληρώσετε τα κενά, αφού υπολογίσετε τις αντίστοιχες τιμές.

(5 μονάδες)

Γ3. Να βρείτε την μέση τιμή του \bar{x} (4 μονάδες)

Γ4. Να βρείτε την τυπική του απόκλιση s

$$\text{όπου } s^2 = \frac{1}{v} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^k x_i^2 \cdot v_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i \cdot v_i \right)^2}{v} \right\} \quad (6 \text{ μονάδες })$$

Γ5. Επιλέγουμε ένα δείγμα k μαθητών από τους v μαθητές της Γ' Λυκείου των οποίων οι απουσίες κατά τον μήνα του Νοεμβρίου ακολουθούν κανονική κατανομή.

- Το 2,5% των μαθητών έχουν τουλάχιστον 9 απουσίες
- Το 16% των μαθητών έχουν το πολύ 6 απουσίες

Να βρεθεί η μέση τιμή \bar{x}_1 και η τυπική απόκλιση s_1 των απουσιών των k μαθητών τον Νοέμβριο και αν εξετάσετε αν το δείγμα αυτό είναι ομοιογενές.

(5 μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ και ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$

με $\omega_1 = 1, \omega_2 = 2$ και $2 < \omega_3 < \omega_4$ με $P(\omega_i) = f(\omega_i) - \frac{3}{4}$ και $i = 1, 2$

και $P(\omega_3) = \frac{1}{8} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x) \cdot (x^2 + 1)}{1 - x}$ Θεωρούμε ακόμα τα ενδεχόμενα

$$A = \left\{ \omega \in \Omega / (\omega^2 + 1) \cdot (2\omega - 4) \cdot f(\omega) - (2\omega^2 - 8) = 0 \right\}$$

$B = \{\omega \in \Omega \cap \{\mu, f(\nu) + 3\}\}$ όπου μ, ν οι θέσεις που η γραφική παράσταση της f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο και τοπικό ελάχιστο αντίστοιχα.

$\Gamma = \{\omega \in \Omega / \eta \text{ εξίσωση } x^2 - \omega x + 1 = 0 \text{ να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες}\}$

Δ1. Να βρεθούν τα $P(\omega_1), P(\omega_2), P(\omega_3), P(\omega_4)$ (7 μονάδες)

Δ2. Να βρεθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων $P(A), P(B), P(\Gamma), P(B - \Gamma)$ (6 μονάδες)

Δ3. Να βρεθεί η εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = f(x) + \kappa$ με $\kappa \in \mathbb{N}^*$ που είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 2x + 8$ (4 μονάδες)

Δ4. Να βρεθεί το κ με $\kappa \in \mathbb{N}^*$ έτσι ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g να σχηματίζει με τους άξονες του καρτεσιανού επιπέδου εμβαδόν μικρότερο από 1 τ.μ. (4 μονάδες)

Δ5. Θεωρούμε τα σημεία $M_i(\omega_i, y_i)$ τα οποία ανήκουν στην εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g όπου ω_i τα στοιχεία του δειγματικού χώρου Ω του ερωτήματος Δ1 με $i = 1, 2, 3, 4$. Αν δ_{ω_i} η διάμεσος των τετμημένων ω_i και

R_{y_i} το εύρος των τεταγμένων y_i για τα οποία ισχύουν $\frac{4}{5} \delta_{\omega_i} + 2 = \omega_4$ και

$R_{y_i} = 6$. Να βρεθούν τα ω_3 και ω_4 (4 μονάδες)

ΟΡΟΣΗΜΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

ΚΑΤΣΙΜΠΡΑΣ ΕΥΘΥΜΗΣ