ΠΙΣΤΟΠΟΙΗΜΕΝΑ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΟΡΟΣΗΜΟ
ΙΑΤΡΙΚΟ - ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ - ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ
Αγ.Κωνσταντίνου 11 - Πειραιάς - τηλ 210 42 24 752 & 210 42 23 687
Αναπαύσεως 81 – Κερατσίνι – Τηλ 210 46 12 555

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν η f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha)\neq f(\beta)$, τότε να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό n μεταξύ των $f(\alpha)$, $f(\beta)$ υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος ώστε $f(x_0)=n$. *Μονάδες 10*

Α2. Έστω f μια συνάρτηση και $A(x_0,f(x_0))$ ένα σημείο της γραφικής της παράστασης. Τι ονομάζεται ως εφαπτομένη της C_f στο Α; *Μονάδες 5*

Α3. Σημειώστε Σωστό ή Λάθος στις παρακάτω προτάσεις: *Μονάδες 10*

(α) Η εφαπτομένη της C_f σε σημείο $A(x_0,f(x_0))$ έχει με την γραφική παράσταση C_f μόνο σε ένα κοινό σημείο.

(β) Αν f συνεχής συνάρτηση στο διάστημα (α,β), τότε το σύνολο τιμών του παραπάνω διαστήματος θα είναι ανοικτό διάστημα.

(γ) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, τότε δεν μπορεί να έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

(δ) Αν $A(x_0,y_0)$ σημείο της γραφικής παράστασης μιας αντιστρέψιμης συνάρτησης f, τότε θα είναι $(f^{-1}\circ f)(x_0)=y_0$.

(ε) Αν είναι $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)}{(x-x_0)^2}=-\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=-\infty$.

– – – –

Αγ.Κωνσταντίνου 11 - Πειραιάς - τηλ 210 42 24 752 & 210 42 23 687
Αναπαύσεως 81 – Κερατσίνι – Τηλ 210 46 12 555

ΘΕΜΑ Β

Ευθεία ε περιστρέφεται γύρω από το σημείο της $P(4,2)$ διατηρώντας θετικό το συντελεστή διεύθυνσής της λ, ο οποίος μεταβάλλεται με ρυθμό 4 μονάδες το λεπτό. Κατά την διάρκεια της περιστροφής, η ε τέμνει τους άξονες στα σημεία A και B.

B1. Να υπολογίσετε το ρυθμό που μεταβάλλεται το εμβαδόν του τριγώνου OAB, τη στιγμή $t = t_0$ κατά την οποία η ευθεία ε διέρχεται από το σημείο $K(1,-1)$. *Μονάδες 10*

Κατά την παραπάνω χρονική στιγμή t_0 η ευθεία ε εφάπτεται της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \mu\sqrt{x+\nu}$ $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ στο σημείο P.

B2. Να προσδιορίσετε τις τιμές των μ, ν. *Μονάδες 8*

B3. Αν $\mu = 2$, $\nu = -3$ να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την ευθεία ε, την γραφική παράσταση της f και τον άξονα x'x. *Μονάδες 7*

– – – –

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε να ισχύουν:

$$\lim_{x\to 0} \frac{F(x) - 3x}{x} = 2\ , \quad F(9) = 0$$

Γ1. Να δείξετε ότι η C_F διέρχεται από το σημείο $O(0,0)$. *Μονάδες 4*

Γ2. Να προσδιορίσετε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_F στο σημείο $O(0,F(0))$. *Μονάδες 4*

Γ3. Να δείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση $y = x - 6$ τέμνει την C_F σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0,9)$. *Μονάδες 5*

Γ4. Αν η F στρέφει τα κοίλα άνω, να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0,9)$ στο οποίο η F παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο. *Μονάδες 6*

Γ5. Να αποδείξετε ότι: (i) $\int_0^2 F(x)dx > 10$ *Μονάδες 3*

(ii) $\int_0^9 F(x)dx > 9F(\xi)$ *Μονάδες 3*

– – – –

Αγ.Κωνσταντίνου 11 - Πειραιάς - τηλ 210 42 24 752 & 210 42 23 687
Αναπαύσεως 81 – Κερατσίνι – Τηλ 210 46 12 555

ΘΕΜΑ Δ

Δινεται η συνάρτηση με τύπο $\varphi(x)=e^{x}+x-5 \quad x\in\mathbb{R}$.

Δ1. Να μελετήσετε την φ ως προς την μονοτονία και την κυρτότητα. Μονάδες 5

Δ2. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\varphi(x)=0$ έχει μοναδική λύση $x_0\in\mathbb{R}$. Μονάδες 5

Δ3. Να μελετήσετε την συνάρτηση $g(x)=\ln(5-x)$ ως προς την μονοτονία και κατόπιν να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$, $\lim\limits_{x\to5^{-}} g(x)$. Μονάδες 5

Δ4. Να αποδείξετε ότι: $g(x_0)=x_0$. Μονάδες 5

Δ5. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_φ στο σημείο της με τετμημένη $\ln\alpha \quad \alpha>0$. Μονάδες 2

Δ6. Να αποδείξετε ότι: $e^{x}+x\geq(\alpha+1)(x-\ln\alpha)+(\alpha+\ln\alpha)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 3

_ _ _ _

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Επιμέλεια: Γρηγόρης Μπαξεβανίδης