# ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ
# ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ
# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

## ΘΕΜΑ Α

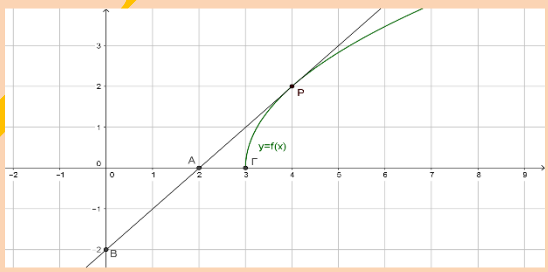
**Α1.** Σχολικό θεώρημα-απόδειξη σελίδας 194

**Α2.** Σχολικό ορισμός σελίδας 212

**Α3.** **(α)** Λάθος, **(β)** Λάθος, **(γ)** Λάθος, **(δ)** Λάθος, **(ε)** Λάθος

## ΘΕΜΑ Β

**Β1.** Τα μεταβλητα μεγέθη που θα μας απασχολήσουν είναι το εμβαδόν Ε και ο συντελεστής διεύθυνσης λ της ευθείας ε.




Η ευθεία ε έχει εξίσωση:

$$\varepsilon : y-2=\lambda(x-4) \quad \lambda>0 \quad (1)$$

Η ε τέμνει τους άξονες στα σημεία Α, Β.

Η (1) για $y=0$ δίνει $x_A=\dfrac{4\lambda-2}{\lambda}$ και πάλι η (1) για $x=0$ δίνει $y_B=2-4\lambda$.

Το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ είναι $\mathrm{E}=\frac{1}{2}(\mathrm{OA})(\mathrm{OB})=\frac{1}{2}|x_A||y_B|=\dfrac{4(2\lambda-1)^2}{\lambda}$.

Για κάθε χρονική στιγμή t είναι $\mathrm{E}(t)=\dfrac{4(2\lambda(t)-1)^2}{\lambda(t)}$ και τότε

$$\mathrm{E}'(t)=4\frac{2(2\lambda(t)-1)\,2\lambda'(t)\lambda(t)-(2\lambda(t)-1)^2\lambda'(t)}{\lambda^2(t)}=$$

$$=4(2\lambda(t)-1)\lambda'(t)\frac{2\lambda(t)+1}{\lambda^2(t)}=$$

$$=4\lambda'(t)\frac{4\lambda^2(t)-1}{\lambda^2(t)}$$

Τη στιγμή $t_0$ που η ε διέρχεται από το Κ είναι $\lambda(t_0)=\lambda_{PK}=\frac{2+1}{4-1}=1$ και $\lambda'(t_0)=4$.

Επομένως $E'(t_0)=4\lambda'(t_0)\frac{4\lambda^2(t_0)-1}{\lambda^2(t_0)}=48\ \mu^2/\min$

**Β2.** Στο σημείο επαφής Ρ ισχύουν:

$$f(4)=2 \Leftrightarrow \mu\sqrt{4+\nu}=2 \quad (2)$$

$$f'(4)=\lambda(t_0)=1 \Leftrightarrow \frac{\mu}{2\sqrt{4+\nu}}=1 \Leftrightarrow \mu=2\sqrt{4+\nu} \quad (3)$$

Από (2), (3) προκύπτει: $\mu=2,\ \nu=-3$

**Β3.** Τη χρονική στιγμή $t_0$ το υπολογιζόμενο χωρίου είναι το μικτόγραμμο τρίγωνο ΑΓΡ όπου $A(2,0)$, $\Gamma(3,0)$, $P(4,2)$ και $\varepsilon: y-2=1(x-4) \Leftrightarrow y=x-2$, $f(x)=2\sqrt{x-3}$

$$\mathcal{E}=\int_2^3 y(x)\,dx+\int_3^4\big(y(x)-f(x)\big)dx=\int_2^3(x-2)\,dx+\int_3^4\left(x-2-2\sqrt{x-3}\right)dx=$$

$$=\left[\tfrac{x^2}{2}-2x\right]_2^3+\left[\tfrac{x^2}{2}-2x-\tfrac{4}{3}(x-3)^{\frac{3}{2}}\right]_3^4=\tfrac{2}{3}\ \mu^2$$

– – – – – – –

## ΘΕΜΑ Γ

**Γ1.** Έστω $g(x)=\frac{F(x)-3x}{x}$ με $x$ κοντά στο 0. Τότε $F(x)=x\,g(x)+3x$

Η F είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη: $F(0)=\lim\limits_{x\to0}F(x)=\lim\limits_{x\to0}\big(x\,g(x)+3x\big)=0+0=0$.

Άρα το $(0,0)$ ανήκει στη γραφικήπαράσταση της F.

**Γ2.**: Η εφαπτομένη έχει εξίσωση: $\varepsilon: y-F(0)=F'(0)(x-0)$ (1)

$$\lim_{x\to0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{x\,g(x)+3x}{x}=\lim_{x\to0}\big(g(x)+3\big)=5=F'(0)$$

Από (1) είναι $\varepsilon: y-0=5(x-0) \Leftrightarrow y=5x$

**Γ3.** Θεωρούμε συνάρτηση $\varphi(x)=F(x)-x+6$ $x\in[0,9]$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον $x_0\in(0,9)$ ώστε $\varphi(x_0)=0 \Leftrightarrow F(x_0)=x_0-6$.

Έτσι η ευθεία με εξίσωση $y=x-6$ τέμνει την $C_F$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0\in(0,9)$.

**Γ4.** Εφαρμόζουμε θεώρημα Rolle στη F στο $[0,9]$. Υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(0,9)$ έτσι ώστε $F'(\xi)=0$. Η F ως κυρτή έχει $F'$ γνησίως αύξουσα.

Αγ.Κωνσταντίνου 11 - Πειραιάς - τηλ 210 42 24 752 & 210 42 23 687
Αναπαύσεως 81 – Κερατσίνι – Τηλ 210 46 12 555

Για $x<\xi$ είναι $F'(x)<F'(\xi) \Leftrightarrow F'(x)<0$ F γν.φθίνουσα στο $[0,\xi]$

Για $x>\xi$ είναι $F'(x)>F'(\xi) \Leftrightarrow F'(x)>0$ F γν.αύξουσα στο $[\xi,9]$

Άρα η F παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=\xi$ που είναι μοναδικό.

**Γ5.** Επειδή η F είναι κυρτή, η γραφ.παράσταση $C_F$ βρίσκεται "πάνω" από κάθε εφαπτομένη της $C_F$. Έτσι λόγω του Γ2 θα είναι $F(x)\geq 5x \quad x\in[0,9]$

Έτσι $F(x)\geq 5x \Leftrightarrow F(x)-5x\geq 0$ και τότε

$$\int_0^2 (F(x)-5x)dx>0 \Leftrightarrow \int_0^2 F(x)dx>\int_0^2 5x\,dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0^2 F(x)dx>5\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 \Leftrightarrow \int_0^2 F(x)dx>10$$

Επίσης από το Γ4 είναι για κάθε $x\in[0,9]$ $F(x)\geq F(\xi) \Leftrightarrow F(x)-F(\xi)\geq 0$ και τότε

$$\int_0^9 (F(x)-F(\xi))dx>0 \Leftrightarrow \int_0^9 F(x)dx>\int_0^9 F(\xi)dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0^9 F(x)dx>F(\xi)[x]_0^9 \Leftrightarrow \int_0^9 F(x)dx>9F(\xi)$$

-------

## ΘΕΜΑ Δ

**Δ1.** φ συνεχής ως άθροισμα συνεχών με $\varphi'(x)=e^x+1>0$. Άρα φ γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Επίσης $\varphi''(x)=e^x>0$ δηλαδή η φ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

**Δ2.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\ldots=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=\ldots=-\infty$

Έτσι το σύνολο τιμών είναι $\varphi(\mathbb{R})\overset{\varphi\,\gamma\nu.\alpha\acute{\upsilon}\xi}{=}\left(\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x),\ \lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$

$0\in\varphi(\mathbb{R})$ και φ γν.αύξουσα Έτσι υπάρχει μοναδικό $x_0$ ώστε $\varphi(x_0)=0$

**Δ3.** g συνεχής στο $(-\infty,5)$ ως σύνθεση συνεχών με $g'(x)=-\dfrac{1}{5-x}<0$. Άρα g γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,5)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\ldots=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to5^-}g(x)=\ldots=-\infty$

**Δ4.** Από το Δ2 έχουμε

$$\varphi(x_0)=0 \Leftrightarrow e^{x_0}+x_0-5=0 \Leftrightarrow e^{x_0}=5-x_0 \quad x_0<5$$

$$\Leftrightarrow x_0=\ln(5-x_0) \Leftrightarrow x_0=g(x_0)$$

**Δ5.** Η εφαπτομένη είναι

$$\varepsilon:\ y-\varphi(\ln\alpha)=\varphi'(\ln\alpha)(x-\ln\alpha) \Leftrightarrow y-(\alpha+\ln\alpha-5)=(\alpha+1)(x-\ln\alpha) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y=(\alpha+1)(x-\ln\alpha)+(\alpha+\ln\alpha-5)$$

**Δ6.** Από το Δ1 η φ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. Τότε $C_\varphi$ "πάνω" από την εφαπτομένη ε. Δηλαδή

$$e^x+x-5\geq(\alpha+1)(x-\ln\alpha)+(\alpha+\ln\alpha-5)$$

$$e^x+x\geq(\alpha+1)(x-\ln\alpha)+(\alpha+\ln\alpha)$$

– – – – – – –

Επιμέλεια : Γρηγόρης Μπαξεβανίδης
Μαθηματικός