

Λύσεις θεμάτων επαναληπτικών πανελληνίων εξετάσεων

Στο μάθημα: « Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής»

Γ' Λυκείου Γενικής Παιδείας

Δευτέρα, 10 Ιουνίου 2013

Θέμα Α

A1. Θεωρία, σελ. 150 Σχολικό Βιβλίο (απόδειξη)

A2. Θεωρία, σελ.92 Σχολικό Βιβλίο (Ορισμός)

A3. Θεωρία, σελ. 22 Σχολικό Βιβλίο (Ορισμός)

A4. α) Σ β) Σ γ) Σ δ) Λ ε) Λ

Θέμα Β

B1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} (ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με

$$f'(x) = 2e^x(2x-1)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Για $x < \frac{1}{2}$ έχουμε $f'(x) < 0$ και άρα η f είναι γν. φθίνουσα στο $(-\infty, \frac{1}{2}]$

Για $x > \frac{1}{2}$ έχουμε $f'(x) > 0$ και άρα η f είναι γν. άξουσα $[\frac{1}{2}, \infty)$

Η f έχει Τ. ελάχιστο στο $x_1 = \frac{1}{2}$ το $f(\frac{1}{2}) = -4\sqrt{e}$

B2. Ως συνέπεια του προηγούμενου ερωτήματος έχουμε ότι :

$$P(A) = x_1 = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = -\frac{f(x_1)}{6\sqrt{e}} = -\frac{-4\sqrt{e}}{6\sqrt{e}} = \frac{2}{3}$$

B3. Έστω ότι τα ενδεχόμενα A και B είναι ασυμβίβαστα τότε θα είναι

$$A \cap B = \emptyset$$

$$P(A \cap B) = 0$$

Τώρα θα έχουμε από τον προσθετικό νόμο των πιθανοτήτων :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{7}{6} > 1 \text{ που είναι } \mathbf{\acute{\alpha}\tau\omicron\pi\omicron}, \text{ \acute{\alpha}\rho\alpha \text{ τα } A \text{ και } B \text{ δεν είναι}} \\ \text{ασυμβίβαστα.}$$

B4. Προφανώς έχουμε

$$A' - B' = A' \cap B \subseteq B$$

$$P(A' - B') \leq P(B) = \frac{2}{3}$$

Θα αποδείξουμε και ότι $P(A' - B') \geq \frac{1}{6}$. Έχουμε:

$$P(A' - B') = P(A' \cap B) = P(A') + P(B) - P(A' \cup B) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - P(A' \cup B) = \frac{7}{6} - P(A' \cup B)$$

Άρα έχουμε ισοδύναμα : $P(A' - B') \geq \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{7}{6} - P(A' \cup B) \geq \frac{1}{6} \Leftrightarrow P(A' \cup B) \leq 1$ που είναι αληθές

Θέμα Γ

Γ1. Αφού οι F_3, F_5 είναι ρίζες της εξίσωσης $5x^2 - 8x + 3\kappa = 0$ θα ισχύουν οι τύποι του Vietta: Άρα (και αφού $F_5=1$) θα έχουμε:

$$F_3 + F_5 = \frac{8}{5} \Leftrightarrow F_3 + 1 = \frac{8}{5} \Leftrightarrow F_3 = \frac{3}{5} = 0,6$$

$$F_3 \cdot F_5 = \frac{3\kappa}{5} \Leftrightarrow 0,6 = \frac{3\kappa}{5} \Leftrightarrow \kappa = 1$$

$$F_5\% = \kappa\lambda^2 - 3\lambda + 30 = 100 \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 70 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 10, \lambda = -7 (\text{απορρίπτεται αφού } F_1\% = \lambda > 0)$$

Γ2. Για τις σχετικές συχνότητες % έχουμε:

$$f_1\% = \lambda = 10\%$$

$$f_2\% = F_2\% - f_1\% = 2\lambda + 10 = 30\%$$

$$f_3\% = F_3\% - f_2\% = 60 - (3\lambda + 10) = 50 - 3\lambda = 20\%$$

$$f_4\% = F_4\% - 60\% = \kappa\lambda^2 - 2\lambda - 50 = 30\%$$

$$f_5\% = F_5\% - F_4\% = -\lambda + 20 = 10\%$$

Γ3. Αφού το 25% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες του 16 θα είναι όσες παρατηρήσεις ανήκουν στην πρώτη κλάση (10%) και το μισό της 2^{ης} κλάσης (δηλαδή το άλλο 15%). Άρα θα είναι όλες οι παρατηρήσεις x_i με: $x_i > \frac{2a+3c}{2} = 16 \Leftrightarrow 2a+3c = 32(I)$

Ακόμα, αφού το 25% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες ή ίσες από το 24 θα είναι οι μισές παρατηρήσεις της 4^{ης} κλάσης και όλες οι παρατηρήσεις της 5^{ης} κλάσης, άρα θα είναι όλες οι παρατηρήσεις x_j με $x_j \geq \frac{2a+7c}{2} = 24 \Leftrightarrow 2a+7c = 48(II)$. Από το σύστημα των σχέσεων (I) και (II) προκύπτει ότι $a=10$ και $c=4$.

Ο πίνακας συμπληρωμένος είναι:

Κλάσεις	Κεντρικές τιμές x_i	$f_i\%$	F_i	$F_i\%$
[10,14)	12	10	0,1	10
[14,18)	16	30	0,4	40
[18,22)	20	20	0,6	60
[22,26)	24	30	0,9	90
[26,30)	28	10	1	100
ΣΥΝΟΛΑ		100		

Γ4. Οι παρατηρήσεις που είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 22 είναι όσες ανήκουν στην 4^η και 5^η κλάση και άρα οι σχετικές συχνότητες τους είναι:

$$f_4 + f_5 = 0,4$$

$$\frac{v_4}{v} + \frac{v_5}{v} = 0,4 \Leftrightarrow \frac{v_4 + v_5}{v} = 0,4 \Leftrightarrow \frac{800}{v} = 0,4 \Leftrightarrow v = 2000$$

Όπου v το μέγεθος του δείγματος.

Θέμα Δ

Δ1. α) Έχουμε τις πιθανότητες των ω_1 και ω_2

$$P(\omega_1) = f(\omega_1) - \frac{1}{3} = f(-1) - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$P(\omega_2) = f(\omega_2) - \frac{1}{3} = f(0) - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Για την πιθανότητα του ω_3 θα έχουμε: Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με $f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, $x \in \mathbb{R}$ και άρα έχουμε:

$$P(\omega_3) = -\frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x-1} = \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{(1+x^2)^2(x-1)} = \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{12}$$

Για την πιθανότητα του ω_3 θα έχουμε:

$$P(\Omega) = 1 \Leftrightarrow P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_3) + P(\omega_4) = 1 \Leftrightarrow P(\omega_4) = 1 - \frac{11}{12} = \frac{1}{12}$$

β) Για το ενδεχόμενο A είναι:

$$A = \left\{ \omega \in \Omega / \frac{1-\omega^2}{(1+\omega^2)^2} \leq 0 \right\} = \left\{ \omega \in \Omega / 1-\omega^2 \leq 0 \right\} = \left\{ \omega \in \Omega / \omega \geq 1 \text{ ή } \omega \leq -1 \right\} = \{\omega_1, \omega_3, \omega_4\}$$

$$P(A) = P(\omega_1) + P(\omega_3) + P(\omega_4) = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Για το ενδεχόμενο B είναι :

$$B = \left\{ \omega \in \Omega / \frac{\omega}{\omega^2+1} + 1 > 1 \right\} = \left\{ \omega \in \Omega / \frac{\omega}{\omega^2+1} > 0 \right\} = \left\{ \omega \in \Omega / \omega > 0 \right\} = \{\omega_3, \omega_4\}$$

$$P(B) = P(\omega_3) + P(\omega_4) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$$

Για το ενδεχόμενο Γ είναι:

$$\Gamma = \left\{ \omega \in \Omega / 4x^2 + 4\omega x + 1 \geq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \omega \in \Omega / 16(\omega^2 - 1) \leq 0 \right\} = \left\{ \omega \in \Omega / -1 \leq \omega \leq 1 \right\} = \{\omega_1, \omega_2\}$$

$$P(\Gamma) = P(\omega_1) + P(\omega_2) = \frac{1}{6} + \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$$

Για το ενδεχόμενο A-B είναι:

$$A - B = \{\omega_1\}$$

$$P(A - B) = P(\omega_1) = \frac{1}{6}$$

Δ2 Έχουμε $\lambda = \varepsilon\varphi 45^\circ = 1 = f'(x_0)$ όπου $A(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής.

$$\text{Η συνάρτηση } f \text{ είναι παραγωγίσιμη με } f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}, x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Άρα } f'(x_0) = \frac{1-x_0^2}{(1+x_0^2)^2} = 1 \Leftrightarrow 3x_0^2 + x_0^4 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0, f(0) = 1.$$

Άρα το σημείο επαφής είναι το $A(0,1)$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο A είναι Q

$$y = \lambda x + \beta$$

$$y = x + \beta$$

και αφού διέρχεται από το A θα είναι :

$$\beta = 1$$

$$y = x + 1$$

Δ3. Οι παρατηρήσεις διατεταγμένες κατά αύξουσα σειρά είναι : $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ και επειδή το

πλήθος είναι άρτιο (4) θα είναι $\delta_{\omega_k} = \frac{\omega_2 + \omega_3}{2}$. Ακόμα, οι τετεγμένες των σημείων M_k ,

διατεταγμένες κατά αύξουσα σειρά είναι $\omega_1 + 1, \omega_2 + 1, \omega_3 + 1, \omega_4 + 1$ και άρα :

$$\delta_{y_k} = \frac{\omega_2 + 1 + \omega_3 + 1}{2} = \frac{\omega_2 + \omega_3 + 2}{2}$$

Έχουμε διαδοχικά από τις δεδομένες σχέσεις:

$$2\delta_{\omega_k} = \delta_{y_k} \Leftrightarrow 2 \frac{\omega_2 + \omega_3}{2} = \frac{\omega_2 + \omega_3 + 2}{2} \Leftrightarrow \omega_2 + \omega_3 = 2 \Leftrightarrow \omega_3 = 2$$

$$R_{y_k} = \omega_4 - \omega_1 = 5 \Leftrightarrow \omega_4 + 1 = 5 \Leftrightarrow \omega_4 = 4$$