

## Λύσεις θεμάτων επαναληπτικών πανελληνίων εξετάσεων 2013

### Στο μάθημα: « Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης» ΗΜΕΡΗΣΙΑ ΓΕ.Λ.

Γ' Λυκείου Κατεύθυνσης  
Πέμπτη, 13 Ιουνίου 2013

#### Θέμα Α:

- A1. Θεωρία, σελ.217 Σχολικό Βιβλίο (απόδειξη)
- A2. Θεωρία, σελ.260 Σχολικό Βιβλίο (διατύπωση θεωρήματος)
- A3. Θεωρία, σελ. 261 Σχολικό Βιβλίο (*Κρίσιμα σημεία λέγονται τα εσωτερικά σημεία του Δ, στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγος της είναι μηδέν*)
- A4.
- α) Σωστό      β) Λάθος      γ) Σωστό      δ) Λάθος      ε) Σωστό

#### Θέμα Β

**B1.** Αφού το  $x = 1$  είναι διπλή ρίζα της δοθείσας εξίσωση θα έχουμε:

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow |w - 4 - 3i|^2 = 16|z| \quad (1)$$

$$2 - |w - 4 - 3i| = -2|z| \Leftrightarrow |w - 4 - 3i| = 2 + 2|z| \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$(2 + 2|z|)^2 = 16|z| \Leftrightarrow |z|^2 - 2|z| + 1 = 0 \Leftrightarrow (|z| - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow |z| = 1 \text{ και άρα η εκόνα του } z \text{ στο μιγαδικό επίπεδο είναι κύκλος κέντρου } O(0,0) \text{ και ακτίνας } \rho_1 = 1$$

Η σχέση (1) δίνει  $|w - 4 - 3i| = 4$  και άρα η εκόνα του  $w$  στο μιγαδικό επίπεδο είναι κύκλος κέντρου  $K(4,3)$  και ακτίνας  $\rho_2 = 4$ .

**B2.** Αν  $\kappa = a + \beta i$  ( $a, \beta \in \mathbb{R}$ ) ο μιγαδικός αριθμός που ανήκει ταυτόχρονα και στους δύο παραπάνω γεωμετρικούς τόπους θα έχουμε:

$$|\kappa| = 1$$

$$|\kappa - 4 - 3i| = 4 \Leftrightarrow |\kappa - 4 - 3i|^2 = 16 \Leftrightarrow (\kappa - 4 - 3i)(\bar{\kappa} - 4 + 3i) = 16 \Leftrightarrow$$

$$k\bar{k} - 4k + 3ki - 4\bar{k} + 16 - 12i - 3\bar{k}i + 12i + 9 = 16 \Leftrightarrow$$

$$1 - 4k - 4\bar{k} + 3ki - 3\bar{k}i + 9 = 0 \Leftrightarrow 10 - 4(k + \bar{k}) + 3i(k - \bar{k}) = 0 \Leftrightarrow 10 - 8\alpha - 6\beta = 0$$

$$8\alpha + 6\beta = 10 \Leftrightarrow 4\alpha + 3\beta = 5 \Leftrightarrow \alpha = \frac{5 - 3\beta}{4}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1 \Leftrightarrow (5\beta - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow \beta = \frac{3}{5}$$

$$\alpha = \frac{4}{5}$$

και άρα ο μιγαδικός  $\kappa$  είναι μοναδικός και είναι ο  $k = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$

**B3.** Έχουμε :

$$\left| |w| - |4 + 3i| \right| \leq |w - 4 - 3i| = 4 \Rightarrow \left| |w| - 5 \right| \leq 4 \Rightarrow |w| \leq 9$$

$$|z + w| \leq |z| + |w| \leq 1 + 9 = 10$$

$$|z - w| \leq 2\rho_1 + 2\rho_2 = 10 (\rho_1, \rho_2 \text{ αντίστοιχα οι ακτίνες των δύο παραπάνω κύκλων})$$

**B4.** Έχουμε:

$$|2z^2 - 3z - 2z\bar{z}| = 5 \Leftrightarrow |z||2z - 3 - 2\bar{z}| = 5 \Rightarrow |2z - 3 - 2\bar{z}| = 1 (z = a + \beta i, a, \beta \in \mathbb{R})$$

$$|4\beta i - 3| = 5 \Leftrightarrow 16\beta^2 + 9 = 25 \Leftrightarrow \beta = 1, \beta = -1$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1 \Rightarrow \alpha = 0$$

Άρα οι ζητούμενοι μιγαδικοί αριθμοί είναι :

$$\begin{aligned} z_1 &= i \\ z_2 &= -i \end{aligned}$$

### Θέμα Γ

**Γ1.** Έχουμε διαδοχικά:

$$2xf(x) + x^2 f'(x) - 3x^2 = -f'(x)$$

$$2xf(x) + x^2 f'(x) + f'(x) = 3x^2$$

$$2xf(x) + (x^2 + 1)f'(x) = 3x^2$$

$$((x^2 + 1)f(x))' = (x^3)'$$

$$(x^2 + 1)f(x) = x^3 + c$$

$$x = 1 \Rightarrow 2f(1) = 1 + c \Rightarrow c = 0$$

$$(x^2 + 1)f(x) = x^3 \Leftrightarrow f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}$$

Η  $f$  ε'ναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με

$$f'(x) = \frac{3x^2}{(x^2+1)^2} > 0, x \in \mathbb{R} \text{ και έτσι η } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } \mathbb{R}.$$

**Γ2.** Για τις ασύμπτωτες:

Δεν υπάρχουν κατακόρυφες ασύμπτωτες αφού  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq \pm\infty$ , για κάθε  $x_0 \in \mathbb{R}$

Στο  $+\infty$  έχουμε:

$$y = \lambda x + \beta$$

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^3 + x} = 1$$

$$\beta = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{x^2 + 1} = 0$$

$$y = x$$

Στο  $-\infty$  έχουμε

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^3 + x} = 1$$

$$\beta = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x^2 + 1} = 0$$

$$y = x$$

Άρα η  $f$  έχει ασύμπτωτη την  $y = x$  στο  $+\infty$  και  $-\infty$

**Γ3.** Η ανίσωση ,επειδή η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ , θα γίνει διαδοχικά:

$$f(5(x^2+1)^3 - 8) \leq f(8(x^2+1)^2)$$

$$5(x^2+1)^3 - 8 \leq 8(x^2+1)^2$$

$$5(x^2+1)^3 \leq 8((x^2+1)^2 + 1)$$

$$\frac{(x^2+1)^3}{(x^2+1)^2 + 1} \leq \frac{8}{5}$$

$$f(x^2+1) \leq f(2)$$

$$x^2+1 \leq 2$$

$$-1 \leq x \leq 1$$

**Γ4.** Θεωρούμε την συνάρτηση  $g(x) = x \int_0^{x^3-x} f(t) dt, x \in [0,1]$  και εφαρμόζουμε το θεώρημα του Rolle στο  $[0,1]$ .

Έχουμε:

Η  $g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $[0,1]$  με  $g'(x) = \int_0^{x^3-x} f(t) dt + xf(x^3-x)(3x^2-1)$

$$g(0) = 0$$

$$g(1) = 0$$

Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον,  $\xi \in (0,1)$ :  $g'(\xi) = 0 \Rightarrow \int_0^{\xi^3 - \xi} f(t) dt = -\xi f(\xi^3 - \xi)(3\xi^2 - 1) = 0$

### Θέμα Δ

**Δ1.** Θέτουμε:  $\int_1^u \frac{(f'(t))^2 - 1}{f(t)} dt = g(u)$  και η δοθείσα σχέση γίνεται:  $f(x) = x + \int_1^x g(u) du$ . (1)

Η συνάρτηση  $\int_1^x g(u) du$  είναι παραγωγίσιμη αφού και η  $\int_1^u \frac{(f'(t))^2 - 1}{f(t)} dt = h(u)$  είναι

παραγωγίσιμη αφού η  $\frac{(f'(t))^2 - 1}{f(t)}$  είναι συνεχής ως πάξεις συνεχών.

Παραγωγίζοντας την (1) για  $x > 0$  έχουμε διαδοχικά:

$$f'(x) = 1 + h(x)$$

$$f'(x) = 1 + \int_1^x \frac{(f'(t))^2 - 1}{f(t)} dt$$

$$f''(x) = \frac{(f'(x))^2 - 1}{f(x)} \Leftrightarrow f''(x)f(x) + 1 = (f'(x))^2, x > 0$$

**Δ2.** α) Αφού  $f(x)f'(x) \neq 0, x > 0$  και η  $f(x)f'(x)$  είναι συνεχής (ως παραγωγίσιμη) σημαίνει ότι διατηρεί σταθερό πρόσημο για  $x > 0$ .

$$f(1) = 1 > 0$$

$$f'(1) = 1 > 0$$

$$f(1)f'(1) = 1 > 0$$

Άρα  $f(x)f'(x) > 0$ , για κάθε  $x > 0$ , δηλαδή η  $f(x), f'(x)$  έχουν το ίδιο πρόσημο και αφού

$$\begin{array}{l} f(1) = 1 > 0 \\ f'(1) = 1 > 0 \end{array} \text{ θα είναι } \begin{array}{l} f(x) > 0 \\ f'(x) > 0 \end{array}, x > 0$$

**β)** Η σχέση του ερωτήματος Δ1 έχουμε (αφού και η  $f'$  είναι συνεχής):

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (f'(x))^2 = (f'(0))^2 \Leftrightarrow (f'(0))^2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} (f(x)f''(x) + 1) = f(0)f''(0) + 1 = 1 \text{ και άρα}$$

$$(f'(0))^2 = 1 \Leftrightarrow f'(0) = 1 \text{ ή } f'(0) = -1 \text{ αφού όμως } f'(x) > 0, x > 0 \text{ θα είναι } f'(0) = 1$$

**Δ3.**

**α)** Θα βρούμε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $g$  στο σημείο  $A(1, g(1))$ . Είναι  $g(1) = \frac{f'(1)}{f(1)} = 1$ . Η συνάρτηση  $g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, \infty)$ , ως πηλίκο

παραγωγίσιμων συναρτήσεων με  $g'(x) = \frac{f''(x)f(x) - (f'(x))^2}{f^2(x)}$ ,  $x > 0$  με  $g'(1) = -1$

(αφού  $f''(1) = 0$ ) και έτσι η εφαπτομένη είναι  $y - 1 = g'(1)(x - 1)$ . Επειδή η  $g$  είναι κυρτή στο  $(0, \infty)$  θα έχουμε ότι  $g(x) \geq -x + 2, x \in (0, \infty)$

**β)** Από την προηγούμενη σχέση θα έχουμε:

$g(x) \geq -x + 2 \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} \geq 2 - x \Rightarrow f'(x) \geq (2 - x)f(x)$ , αφού  $f(x) > 0$  και άρα θα έχουμε

$$\int_0^1 f'(x) dx > \int_0^1 (2 - x)f(x) dx \Rightarrow f(1) - f(0) > \int_0^1 (2 - x)f(x) dx \Rightarrow \int_0^1 (2 - x)f(x) dx < 1$$

**Δ4.** Το ζητούμενο εμβαδόν θα είναι διαδοχικά και με την χρήση του ερωτήματος Δ1.

$$E(\Omega) = \int_0^1 |f'(x)^3| dx = \int_0^1 f'(x)^3 dx = \int_0^1 f'(x)(f'(x))^2 dx = [f(x)f'(x)^2]_0^1 - \int_0^1 f(x)f''(x)f'(x) dx =$$

$$1 - \int_0^1 (1 - f'(x)^2)f'(x) dx = 1 - \int_0^1 f'(x) dx + 2 \int_0^1 (f'(x))^3 dx = 1 - f(1) - f(0) + 2E(\Omega)$$

$$E(\Omega) = 2E(\Omega) - 1 \Rightarrow E(\Omega) = 1 \text{ τ.μ.}$$