Λύσεις θεμάτων επαναληπτικών πανελληνίων εξετάσεων

Στο μάθημα: « Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής»

Γ΄Λυκείου Γενικής Παιδείας

Δευτέρα, 10 Ιουνίου 2013
ΕΣΠΕΡΙΝΑ

Θέμα Α

Α1. Θεωρία, σελ. 31 Σχολικό Βιβλίο (απόδειξη)

Α2. Θεωρία, σελ.92 Σχολικό Βιβλίο (Ορισμός)

Α3. Θεωρία, σελ. 22 Σχολικό Βιβλίο (Ορισμός)

Α4. α) Σ β) Σ γ) Σ δ) Λ ε) Σ

Θέμα Β

Β1. Αφού η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο Α(-1,9) θα έχουμε:
$f(-1)=9 \Leftrightarrow -\alpha+\beta+5=9 \Leftrightarrow \beta-a=4(I)$ και ακόμα

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)}{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+7}+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x+2)(\sqrt{x+7}+3)}=\frac{1}{24}=\frac{1}{2a}$$

Άρα $12a=24 \Leftrightarrow a=2$ και από την (Ι) β=6

Β2. Έστω $B(x_1, f(x_1))$ τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f είναι // χ΄χ . Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R με $f'(x)=6x^2-6, x\in\mathbb{R}$. Θα πρέπει
$f'(x_1)=6x_1^2-6=0 \Leftrightarrow x_1=1$ ή $x_1=-1$ και άρα τα σημεία είναι :

$B(1, f(1))$
$B(1,1)$
$B'(-1, f(-1))$
$B'(-1,9)$

B3. Ο ρυθμός μεταβολής της f είναι $f'(x) = 6x^2 - 6$ =g(x), $x \in \mathbb{R}$. Θα βρούμε το ελάχιστο της g. Η g είναι παραγωγίσιμη στο R με

$g'(x) = 12x = 0 \Leftrightarrow x = 0$
$\Gamma\iota\alpha$ x>0 $g'(x) > 0$ και άρα η g είναι γν.αύξουσα στο [0,∞)
$\Gamma\iota\alpha$ x<0 $g'(x) < 0$ και άρα η g είναι γν. φθίνουσα στο (-∞,0]
Η g έχει στο $x_0 = 0$ Τ. ελάχιστο το g(0)=f΄(0)=-6
(Μπορούμε να δημιουργήσουμε και πίνακα μεταβολών της f)

Θέμα Γ

Γ1. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι

$y = \lambda x + \beta$
$\lambda = g'(x_0) = \varepsilon\varphi 45^0 = 1$
$y = x + \beta$

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο R με $g'(x) = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Έχουμε $g'(x_0) = \dfrac{1-{x_0}^2}{(1+{x_0}^2)^2} = 1 \Leftrightarrow x_0 = 0$. Άρα $A(0, g(0)) = (0,1)$. Τότε έχουμε β=1 και άρα η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση $y = x + 1$

Γ2. Η g είναι παραγωγίσιμη στο R με
$g'(x) = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Έχουμε $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = -1$.
Άρα θα έχουμε για την μονοτονία της:

- Για x<-1 η g΄(x)<0 και άρα η g είναι γν. φθίνουσα στο $(-\infty, -1]$
- Για -1<x<1 η g΄(x)>0 και άρα η g είναι γν. αύξουσα στο $[-1,1]$
- Για x>1 η g΄(x)<0 και άρα η g είναι γν. φθίνουσα στο $[1, \infty)$

Για τα ακρότατα της f:
Η g έχει ελάχιστο στο $x_1 = -1$ το $g(-1) = \dfrac{1}{2}$

Η g έχει μέγιστο στο $x_2 = 1$ το $g(1) = \frac{3}{2}$

Γ3. Οι τιμές της μεταβλητής X διατεταγμένες κατά αύξουσα σειρά είναι x_1, x_2, x_3, x_4 με αντιστοιχες σχετικές συχνότητες

$$f_1 = g(-1) - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$
$$f_2 = g(0) - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$
$$f_3 = -\frac{1}{6}\lim_{x\to 1}\frac{g'(x)}{x-1} = \frac{1}{6}\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{(x-1)(x^2+1)^2} = \frac{1}{6}\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{12}$$

Αφού τα σημεία $M_k(x_k, y_k)$ ανήκουν στην ευθεία $y = x+1$ θα έχουμε $y_k = x_k + 1$ που διατεταγμένα κατά την αύξουσα σειρά θα είναι y_1, y_2, y_3, y_4.
Η διάμεσοι αντίστοιχα των x_k και y_k είναι

$$\delta_{x_k} = \frac{x_2 + x_3}{2} = \frac{x_3}{2}$$
$$\delta y_k = \frac{y_2 + y_3}{2} = \frac{x_3 + 2}{2}$$

Από την δεδομένη σχέση έχουμε διαδοχικά $2\delta_{x_k} = \delta y_k \Leftrightarrow x_3 = \frac{x_3+2}{2} \Leftrightarrow x_3 = 2$ και από την
$R_{y_k} = 5 \Leftrightarrow y_4 - y_1 = 5 \Leftrightarrow x_4 - x_1 = 5 \Leftrightarrow x_4 + 1 = 5 \Leftrightarrow x_4 = 4$

Θέμα Δ

Δ1. Αφού οι F_3 , F_5 είναι ρίζες της εξίσωσης $5x^2 - 8x + 3\kappa = 0$ θα ισχύουν οι τύποι του Vietta: Άρα (και αφού F_5 =1) θα έχουμε:

$$F_3 + F_5 = \frac{8}{5} \Leftrightarrow F_3 + 1 = \frac{8}{5} \Leftrightarrow F_3 = \frac{3}{5} = 0,6$$
$$F_3 \cdot F_5 = \frac{3\kappa}{5} \Leftrightarrow 0,6 = \frac{3\kappa}{5} \Leftrightarrow \kappa = 1$$

$F_5\% = \kappa\lambda^2 - 3\lambda + 30 = 100 \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 70 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 10, \lambda = -7$($απορρίπτεται$ αφού $F_1\% = \lambda > 0$)

Δ2. Για τις σχετικές συχνότητες % έχουμε:

$f_1\% = \lambda = 10\%$
$f_2\% = F_2\% - f_1\% = 2\lambda + 10 = 30\%$
$f_3\% = F_3\% - f_2\% = 60 - (3\lambda + 10) = 50 - 3\lambda = 20\%$
$f_4\% = F_4\% - 60\% = \kappa\lambda^2 - 2\lambda - 50 = 30\%$
$f_5\% = F_5\% - F_4\% = -\lambda + 20 = 10\%$

Δ3. Αφού το 25% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες του 16 θα είναι όσες παρατηρήσεις ανήκουν στην πρώτη κλάση (10%) και το μισό της 2ης κλάσης (δηλαδή το άλλο 15%).Άρα θα είναι όλες οι παρατηρήσεις χ_ι με: $x_i > \frac{2a+3c}{2} = 16 \Leftrightarrow 2a + 3c = 32(I)$

Ακόμα, αφού το 25% των παρατηρήσεων είναιμεγαλύτερες ή ίσες από το 24 θα είναι οι μισές παρατηρήσεις της 4ης κλάσης και όλες οι παρατηρήσεις της 5ης κλάσης, άρα θα είναι όλες οι παρατηρήσεις χ_j με $x_j \geq \frac{2a+7c}{2} = 24 \Leftrightarrow 2a + 7c = 48(II)$. Από το σύστημα των σχέσεων (I) και (II) προκύπτει ότι α=10 και c=4.

Ο πίνακας συμπληρωμένος είναι:

Κλάσεις	**Κεντρικές τιμές χι**	**fi%**	**Fi**	**Fi%**
[10,14)	12	10	0,1	10
[14,18)	16	30	0,4	40
[18,22)	20	20	0,6	60
[22,26)	24	30	0,9	90
[26,30)	28	10	1	100
ΣΥΝΟΛΑ		100		

Δ4. Οι παρατηρήσεις που είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 22 είναι όσες ανήκουν στην 4η και 5η κλάση και άρα οι σχετικές συχνότητες τους είναι:
$f_4 + f_5 = 0,4$
$\frac{\nu_4}{\nu} + \frac{\nu_5}{\nu} = 0,4 \Leftrightarrow \frac{\nu_4 + \nu_5}{\nu} = 0,4 \Leftrightarrow \frac{800}{\nu} = 0,4 \Leftrightarrow \nu = 2000$
Όπου ν το μέγεθος του δείγματος.