

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία σελίδα 217-218

A2. Θεωρία σελίδα 303

A3. Θεωρία σελίδα 275

A4. 1. Λ 2. Σ 3. Σ 4. Λ

ΘΕΜΑ Β

B1. Θεωρούμε συνάρτηση $A(x) = \ln x \cdot f(x)$ όπου:

Η A είναι συνεχής στο $[1,2]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων (η f είναι παραγωγίσιμη στο $[1,2]$ άρα και συνεχής)

Η A είναι παραγωγίσιμη στο $(1,2)$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Ακόμα $A(1) = \ln 1 \cdot f(1) = 0$ και $A(2) = \ln 2 \cdot f(2) = 0$. Επομένως από θεώρημα Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1,2)$: $A'(\xi) = 0$, όπου

$$A'(x) = (\ln x \cdot f(x))' = \frac{1}{x} \cdot f(x) + \ln x \cdot f'(x). \text{ Άρα, } \frac{1}{\xi} \cdot f(\xi) + \ln \xi \cdot f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\xi} \cdot f(\xi) = -\ln \xi \cdot f'(\xi) \Leftrightarrow f(\xi) = -\xi \cdot \ln \xi \cdot f'(\xi).$$

B2. Έχουμε $g(x) = \ln x \cdot h(x) \Leftrightarrow g(x) = \ln x \cdot (3x^2 - 2x)$ με

$$g'(x) = \frac{1}{x} \cdot (3x^2 - 2x) + \ln x \cdot (6x - 2) \Leftrightarrow g'(1) = 1 + \ln 1 \cdot 4 = 1 \text{ και}$$

$g(1) = \ln 1 \cdot (3 - 2) = 0$. Επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης είναι

$$y - g(1) = g'(1) \cdot (x - 1) \Leftrightarrow y - 0 = 1 \cdot (x - 1) \Leftrightarrow y = x - 1.$$

B3. Έχουμε ότι $g(x) = \ln x \cdot (3x^2 - 2x)$ με $g'(x) = \frac{1}{x} \cdot (3x^2 - 2x) + \ln x \cdot (6x - 2) \Leftrightarrow$

$$g'(x) = (3x - 2) + \ln x \cdot (6x - 2) \text{ και } g''(x) = \frac{6x \cdot \ln x + 9x - 2}{x}.$$

Θεωρούμε $K(x) = 6x \cdot \ln x + 9x - 2$ που είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $K'(x) = 6 \ln x + 6 + 9 = 6 \ln x + 15 > 0$ και αφού η συνάρτηση $K(x)$ είναι και συνεχής έχουμε ότι είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x \geq 1$ και $K(x) \geq K(1) = 7 > 0$. Άρα $g''(x) > 0$ για κάθε $x \geq 1$ και g συνεχής στο $[1, +\infty)$ άρα η g είναι κυρτή στο $[1, +\infty)$. Επομένως η γραφική παράσταση της συνάρτησης g , C_g , θα βρίσκεται πάνω από την την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(1, g(1))$. Άρα, $g(x) \geq x - 1 \Leftrightarrow \ln x \cdot (3x^2 - 2x) \geq x - 1$.

B4. Έχουμε ότι $\int_1^e \ln x \cdot (x^3 - x^2)' dx = [\ln x \cdot (x^3 - x^2)]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \cdot (x^3 - x^2) dx =$

$$= e^3 - e^2 - \int_1^e (x^2 - x) dx = e^3 - e^2 - \left[\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) \right]_1^e = e^3 - e^2 - \left[\left(\frac{e^3}{3} - \frac{e^2}{2} \right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) \right] =$$

$$= e^3 - e^2 - \frac{e^3}{3} + \frac{e^2}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2e^3}{3} - \frac{e^2}{2} + \frac{1}{6} = \frac{4e^3 - 3e^2 + 1}{6}.$$

ΘΕΜΑ Γ

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
-----	---	---------------	-----------

Γ1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = \ln x + 1$ και $f'(x) > 0 \Leftrightarrow$

$$\ln x + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > -1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{e}$$

με $f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \cdot \ln \frac{1}{e} = -\frac{1}{e} < 0$

Για $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$ έχω $f'(x) < 0$ και

f συνεχής στο $\left(0, \frac{1}{e}\right]$ άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0, \frac{1}{e}\right]$, ενώ

για $x \in \left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ έχω $f'(x) > 0$ και η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$ άρα

η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$. Η f παρουσιάζει ολικό

ελάχιστο για $x = \frac{1}{e}$, το $f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$.

$$\text{Ακόμα } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \cdot \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\frac{-\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^2}{x} = 0$$

Ενώ, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \cdot \ln x) = +\infty$. Επομένως το σύνολο τιμών θα είναι

$$f((0, +\infty)) = \left[f\left(\frac{1}{e}\right), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) \cup \left[f\left(\frac{1}{e}\right), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = \left[-\frac{1}{e}, 0 \right) \cup \left[-\frac{1}{e}, +\infty \right) = \left[-\frac{1}{e}, +\infty \right)$$

Γ2. Έχουμε ότι $x^x = e^{2016} \Leftrightarrow \ln x^x = \ln e^{2016} \Leftrightarrow x \cdot \ln x = 2016 \Leftrightarrow f(x) = 2016$.

Για $x > \frac{1}{e}$ η f είναι γνησίως αύξουσα και $f\left(\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)\right) = \left[-\frac{1}{e}, +\infty\right)$ όπου το

$2016 \in \left[-\frac{1}{e}, +\infty\right)$. Άρα υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 \in \left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ τέτοιο ώστε

$f(x_0) = 2016$, δηλαδή η εξίσωση $f(x) = 2016$ έχει ακριβώς μία ρίζα.

Γ3. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στα $[\alpha, \beta]$ και $[\beta, \gamma]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στα (α, β) και (β, γ) ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Επομένως με εφαρμογή του θεωρήματος Μέσης τιμής στα $[\alpha, \beta]$ και $[\beta, \gamma]$ έχουμε ότι:

Υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow f'(\xi_1) = \frac{\beta \ln \beta - \alpha \ln \alpha}{\beta - \alpha}$$

Και υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (\beta, \gamma)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\gamma) - f(\beta)}{\gamma - \beta} \Leftrightarrow f'(\xi_2) = \frac{\gamma \ln \gamma - \beta \ln \beta}{\gamma - \beta}.$$

Ακόμα $f''(x) = (\ln x + 1)' = \frac{1}{x} > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ και η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ άρα η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$ και επομένως η f' είναι γνησίως αύξουσα. Άρα, για $\xi_1 < \xi_2 \Rightarrow f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Leftrightarrow$

$$\frac{\beta \ln \beta - \alpha \ln \alpha}{\beta - \alpha} < \frac{\gamma \ln \gamma - \beta \ln \beta}{\gamma - \beta} \xrightarrow{\gamma - \beta > 0} (\gamma - \beta) \cdot (\beta \ln \beta - \alpha \ln \alpha) < (\beta - \alpha) \cdot (\gamma \ln \gamma - \beta \ln \beta) \Leftrightarrow$$

$$(\gamma - \beta) \cdot \ln \frac{\beta^\beta}{\alpha^\alpha} < (\beta - \alpha) \cdot \ln \frac{\gamma^\gamma}{\beta^\beta}.$$

Γ4. Για $x \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$ έχω $\ln x < 0 \xrightarrow{x > 0} x \ln x < 0 \Leftrightarrow f(x) < 0$.

$$E(\Omega) = \int_{\frac{1}{e}}^1 |f(x)| dx = - \int_{\frac{1}{e}}^1 f(x) dx = \int_{\frac{1}{e}}^1 f(x) dx = \int_{\frac{1}{e}}^1 (x \cdot \ln x) dx =$$

$$\left[\frac{x^2}{2} \cdot \ln x \right]_{\frac{1}{e}}^1 - \int_{\frac{1}{e}}^1 \left(\frac{x^2}{2} \cdot (\ln x)' \right) dx = \frac{1}{2e^2} \cdot (-1) - 0 - \int_{\frac{1}{e}}^1 \left(\frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \right) dx = -\frac{1}{2e^2} - \int_{\frac{1}{e}}^1 \left(\frac{x}{2} \right) dx =$$

$$= -\frac{1}{2e^2} - \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^{\frac{1}{e}} = -\frac{1}{2e^2} - \frac{1}{4e^2} + \frac{1}{4} = \frac{e^2 - 3}{4e^2}.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Αφού $x \neq -1$, έχουμε ότι $f'(x) = \frac{x \cdot e^{x+1}}{(x+1)^2} = \frac{x \cdot e^{x+1} + e^{x+1} - e^{x+1}}{(x+1)^2} =$

$$= \frac{e^{x+1} \cdot (x+1) - e^{x+1}}{(x+1)^2}$$

Επομένως, $f'(x) = \left(\frac{e^{x+1}}{x+1} \right)' \Leftrightarrow f(x) = \frac{e^{x+1}}{x+1} + c \xrightarrow[\substack{x=0 \\ f(0)=e}]{f(0)=\frac{e^{0+1}}{0+1}} f(0) = \frac{e^{0+1}}{0+1} + c \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e = e + c \Leftrightarrow c = 0$. Άρα, $f(x) = \frac{e^{x+1}}{x+1}$ με $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$.

Δ2. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = \frac{x \cdot e^{x+1}}{(x+1)^2} > 0$ για $x > 0$ και είναι

συνεχής ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων, επομένως είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$

άρα και «1-1». Επομένως $f(g(x)) = \frac{e^2}{2} \Leftrightarrow f(g(x)) = f(1) \Leftrightarrow g(x) = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^3 - 3x^2 - 2 = 1 \Leftrightarrow 2x^3 - 3x^2 - 3 = 0$. Θεωρούμε συνάρτηση $\varphi(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3$

όπου $\varphi'(x) = 6x^2 - 6x = 6x \cdot (x-1)$ και

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = -3$, ενώ $\varphi(1) = -4$. Ακόμα $\varphi'(x) < 0$

στο $(0, 1)$ και συνεχής ως πολωνυμική άρα φ είναι

γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$, ενώ $\varphi'(x) > 0$ στο

$(1, +\infty)$ και φ είναι συνεχής στο $[1, +\infty)$ ως

πολωνυμική, άρα η συνάρτηση φ είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$. Η συνάρτηση

παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x = 1$, το $\varphi(1) = -4$. Τέλος $0 \in \varphi([1, +\infty)) = [-4, +\infty)$,

x	0	1	$+\infty$
$\varphi'(x)$	-		+
$\varphi(x)$		Γν. φθίνουσα	Γν. αύξουσα

όπου $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 - 3x^2 - 3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3) = +\infty$ και η συνάρτηση φ είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$. Άρα η εξίσωση $\varphi(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0, +\infty)$.

$$\Delta 3. \alpha) \text{ Έχουμε ότι } \int_1^2 (x+1)^2 \cdot f'(x) dx = \int_1^2 (x+1)^2 \cdot \frac{x \cdot e^{x+1}}{(x+1)^2} dx =$$

$$= \int_1^2 (x \cdot e^{x+1}) dx = \left[x \cdot e^{x+1} \right]_1^2 - \int_1^2 (e^{x+1}) dx = 2e^3 - e^2 - \left[e^{x+1} \right]_1^2 =$$

$$= 2e^3 - e^2 - e^3 + e^2 = e^3.$$

Επομένως $L(x) = \ln x - \sqrt{1-x}$ με $D_L = (0, 1]$ και $L'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2\sqrt{1-x}} > 0$

για κάθε $x \in (0, 1)$ και $L(x)$ συνεχής στο $(0, 1]$ ως διαφορά συνεχώς συναρτήσεων, άρα $L(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 1]$ και επομένως $L(x)$ είναι «1-1» άρα αντιστρέφεται.

β) Έχουμε ότι $D_{L^{-1}} = L\left(\overset{L \text{ γν. αύξουσα}}{(0, 1]}\right) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} L(x), L(1)\right]$ με

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} L(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x - \sqrt{1-x}) = -\infty \text{ και } L(1) = \ln 1 - 0 = 0.$$

Άρα, $D_{L^{-1}} = (-\infty, 0]$.

$\Delta 4.$ Έχουμε ότι $0 < L^{-1}(x) \leq 1 \xrightarrow{x^2 > 0} 0 < x^2 \cdot L^{-1}(x) \leq x^2$, όπου $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ και από κριτήριο παρεμβολής έχουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \cdot L^{-1}(x)) = 0$.

ΟΡΟΣΗΜΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

ΚΑΤΣΙΜΠΡΑΣ ΕΥΘΥΜΗΣ