ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1

Έστω δείγμα Α που αποτελείται από τις τετμημένες $x_1, x_2, \dots, x_\nu$ ν σημείων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x - \ln(e^x + \lambda)$ που έχουν μέση τιμή $\overline{x_A} > 0$ και τυπική απόκλιση s_A, όπου λ σταθερός αριθμός που ανήκει στον δειγματικό χώρο $\Omega = \{1,2,3,4\}$ ενός πειράματος τύχης.

α) να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία

β) να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων τους τα ενδεχόμενα:

$$K = \{\lambda \epsilon \Omega / (\lambda+1)^2 \cdot f''(0) > -3\}$$
$$\Lambda = \{\lambda \epsilon \Omega / \left(e^\lambda + \lambda\right) \cdot f'(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 8\}$$

γ) αν το δείγμα Β αποτελείται από τις παρατηρήσεις:

$$y_i = \frac{[P(K) + P(\Lambda) + 1] \cdot \overline{x_A} - P(K \cup \Lambda) \cdot x_i}{s_A}, \qquad i = 1,2,\dots,\nu$$

να αποδείξετε ότι

$$\overline{y_B} = \frac{1}{CV_A}$$

δ) να εξετάσετε πιο από τα δύο δείγματα Α και Β έχει μεγαλύτερη ομοιογένεια

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \epsilon \mathbb{R}$ είναι:

$$f'(x) = (x)' - [\ln(e^x + \lambda)]' = 1 - \frac{1}{e^x + \lambda} \cdot (e^x + \lambda)' = 1 - \frac{e^x}{e^x + \lambda} = \frac{e^x + \lambda - e^x}{e^x + \lambda} = \frac{\lambda}{e^x + \lambda}$$

Όμως $\lambda \epsilon \Omega$ δηλαδή $\lambda > 0$ οπότε $f'(x) > 0$ για κάθε $x \epsilon \mathbb{R}$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Βρίσκουμε την $f''(x)$

$$f''(x) = \left(\frac{\lambda}{e^x + \lambda}\right)' = \frac{(\lambda)' \cdot (e^x + \lambda) - \lambda \cdot (e^x + \lambda)'}{(e^x + \lambda)^2} = \frac{-\lambda e^x}{(e^x + \lambda)^2}$$

Επομένως για το ενδεχόμενο Κ έχουμε:

$$(\lambda+1)^2 \cdot f''(0) > -3 \Leftrightarrow (\lambda+1)^2 \cdot \frac{-\lambda}{(1+\lambda)^2} > -3 \Leftrightarrow -\lambda > -3 \Leftrightarrow \lambda < 3$$

Όμως $\lambda \epsilon \Omega$ άρα το ενδεχόμενο Κ είναι $K = \{1,2\}$

Για το ενδεχόμενο Λ έχουμε:

$$\left(e^\lambda + \lambda\right) \cdot f'(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 8 \Leftrightarrow \left(e^\lambda + \lambda\right) \cdot \frac{\lambda}{e^\lambda + \lambda} = \lambda^2 - \lambda - 8 \Leftrightarrow \lambda = \lambda^2 - \lambda - 8 \Leftrightarrow$$
$$\lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0$$
$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 4 + 32 = 36$$
$$\lambda_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 6}{2}$$

Οπότε $\lambda = 4$ ή $\lambda = -2$, επομένως το ενδεχόμενο Λ είναι το $\Lambda = \{4\}$

γ) Για $i = 1,2,\dots,\nu$ είναι

$$y_i = \frac{[P(K)+P(\Lambda)+1]\cdot \overline{x_A}}{s_A} - \frac{P(K\cup \Lambda)}{s_A}\cdot x_i$$

Όμως οι αριθμοί $P(K)$, $P(\Lambda)$, $P(K\cup\Lambda)$, $\overline{x_A}$, s_A είναι σταθεροί, οπότε σύμφωνα με την αλλαγή της μεταβλητής έχουμε,

$$\overline{y_B} = \frac{[P(K)+P(\Lambda)+1]\cdot \overline{x_A}}{s_A} - \frac{P(K\cup\Lambda)}{s_A}\cdot \overline{x_A} = \frac{[P(K)+P(\Lambda)+1]\cdot \overline{x_A} - P(K\cup\Lambda)\cdot \overline{x_A}}{s_A} =$$

$$= \frac{[P(K)+P(\Lambda)+1-P(K\cup\Lambda)]\cdot \overline{x_A}}{s_A}$$

Από το ερώτημα (β) παρατηρούμε ότι $K\cap\Lambda=\emptyset$, οπότε σύμφωνα με τον απλό προσθετικό νόμο είναι,

$$P(K\cup\Lambda)=P(K)+P(\Lambda)$$

Επομένως,

$$\overline{y_B} = \frac{[P(K)+P(\Lambda)+1-P(K)-P(\Lambda)]\cdot \overline{x_A}}{s_A} = \frac{\overline{x_A}}{s_A} = \frac{1}{CV_A}$$

δ) Για να εξετάσουμε τα δύο δείγματα ως προς την ομοιογένεια θα πρέπει να συγκρίνουμε τους συντελεστές μεταβολής τους. Για το Β, λόγω της αλλαγής της μεταβλητής έχουμε:

$$s_B = \left|-\frac{P(K\cup\Lambda)}{s_A}\right|\cdot s_A \overset{P(K\cup\Lambda)\geq 0}{\Longleftrightarrow} s_B = \frac{P(K\cup\Lambda)}{s_A}\cdot s_A \Leftrightarrow s_B = P(K\cup\Lambda)$$

Επομένως,

$$CV_B = \frac{s_B}{\overline{y_B}} = \frac{P(K\cup\Lambda)}{\frac{1}{CV_A}} = P(K\cup\Lambda)\cdot CV_A$$

Όμως $P(K\cup\Lambda)\leq 1$ δηλαδή $CV_B \leq CV_A$, οπότε το δείγμα Β έχει μεγαλύτερη ομοιογένεια ή έχουν την ίδια.

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται δύο ενδεχόμενα Α, Β ενός δειγματικού χώρου Ω και η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-2)\cdot P(A\cap B)+x^2-2x}{x^2-3x+2}, & \alpha\nu\ x\neq 2 \\ P(A), & \alpha\nu\ x=2 \end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι συνεχής στο $x_0=2$

ΛΥΣΗ

Έστω ότι η f είναι συνεχής στο $x_0=2$. Τότε πρέπει

$$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) \quad (\mathbf{1})$$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\cdot P(A\cap B)+x^2-2x}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\cdot P(A\cap B)+x(x-2)}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\cdot (P(A\cap B)+x)}{(x-2)(x-1)} =$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{P(A\cap B)+x}{x-1} = \frac{P(A\cap B)+2}{2-1} = P(A\cap B)+2$$

$$f(2)=P(A)$$

Από την σχέση **(1)** έχουμε: $P(A \cap B) + 2 = P(A) \quad (\mathbf{2})$

Όμως $0 \leq P(A \cap B) \leq 1 \overset{+2}{\Leftrightarrow} 2 \leq P(A \cap B) + 2 \leq 3 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} 2 \leq P(A) \leq 3$ που είναι άτοπο.

Άρα η f δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 2$.

ΘΕΜΑ 3

Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο ζάρι 2 φορές και καταγράφουμε με α το αποτέλεσμα της πρώτης ρίψης και β το αποτέλεσμα της δεύτερης. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = x\sqrt{x^2+1} - x^2e^x + (\alpha+\beta)x + 2010$

Να βρεθεί η πιθανότητα ώστε η εφαπτομένης της καμπύλης της f στο σημείο της $M\big(0, f(0)\big)$ να είναι παράλληλη στην ευθεία (ε): $y = 5x - 8$

ΛΥΣΗ:

Η f ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$.Για να είναι η εφαπτομένη της f στο σημείο της M παράλληλη στην (ε) θα πρέπει: $f\,'(0) = 5$

Βρίσκουμε την παράγωγο της f:

$$f\,'(x) = \left(x\sqrt{x^2+1}\right)' - (x^2e^x)' + \big((\alpha+\beta)x\big)' = \sqrt{x^2+1} + \frac{x}{2\sqrt{x^2+1}}(x^2+1)' - (2xe^x + x^2e^x) + (\alpha+\beta) =$$

$$= \sqrt{x^2+1} + \frac{x \cdot 2x}{2\sqrt{x^2+1}} - 2xe^x - x^2e^x + \alpha + \beta$$

Οπότε: $f\,'(0) = \sqrt{1} + \alpha + \beta = 1 + \alpha + \beta$

Επειδή όμως $f\,'(0) = 5 \Leftrightarrow 1 + \alpha + \beta = 5 \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha + \beta = 4}$

Δηλαδή ζητάμε την πιθανότητα του ενδεχομένου $A = \{(\alpha, \beta) \;/\; \alpha + \beta = 4\}$

Ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι:

$$\Omega = \begin{Bmatrix} (1,1) & (1,2) & \dots & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & \dots & (2,6) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (6,1) & (6,2) & \cdots & (6,6) \end{Bmatrix} \qquad \text{Επομένως} \quad N(\Omega) = 36$$

Ενώ το ενδεχόμενο A είναι $A = \{(1,3), (2,2), (3,1)\}$ $\quad με \quad N(A) = 3$

Άρα $P(A) = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)} = \dfrac{3}{36} = \dfrac{1}{12}$