ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f\colon(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση

$$\sqrt{x}f(x)-\sqrt{y}f(y)=\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)f\left(x+y-\sqrt{xy}\right)\ \ \text{για κάθε}\ x,y\in(0,+\infty)\qquad(1)$$

i. **Να δειχθεί ότι η f είναι σταθερή στο $(0,+\infty)$.**

ii. **Εάν**

$$\lim_{x\to1}\frac{\int_1^x e^{2kt^2-f(t)}dt}{e^x-e}=e^{k^2-2013}$$

όπου η πραγματική παράμετρος κ παίρνει μοναδική τιμή, να υπολογισθεί ο τύπος της f.

iii. **Εάν για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $g\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ ισχύει**

$$g'(x)<\frac{\left(f(x^2+1)+1\right)x^{2013}}{x^{2014}+1}\ \ \text{για κάθε}\ x\in\mathbb{R}\qquad(2)$$

να δειχθεί ότι η γραφική παράσταση της g τέμνει τη γραφική παράσταση της $h(x)=ln(x^{2014}+1),x\in\mathbb{R}$ σ' ένα μόνο σημείο.

iv. **Να υπολογισθεί το όριο**

$$\lim_{x\to+\infty}\int_{x+2012}^{x+2013}e^{t^{f\left(\sqrt{t^2+1}\right)}}dt$$

ΛΥΣΗ

i. Θα δείξουμε ότι $f'(x)=0$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$.
Θέτω $y=x_0$ με $x_0\in(0,+\infty)$ και $x\neq x_0$. Τότε η (1) γίνεται:

$$\sqrt{x}f(x)-\sqrt{x_0}f(x_0)=\left(\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right)f\left(x+x_0-\sqrt{xx_0}\right)\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x}f(x)-\sqrt{x_0}f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right)f\left(x+x_0-\sqrt{xx_0}\right)}{x-x_0}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x}f(x)-\sqrt{x}f(x_0)+\sqrt{x}f(x_0)-\sqrt{x_0}f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)f\left(x+x_0-\sqrt{xx_0}\right)}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x}\left(f(x)-f(x_0)\right)+f(x_0)\left(\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right)}{x-x_0}=\frac{(x-x_0)f\left(x+x_0-\sqrt{xx_0}\right)}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+f(x_0)\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\frac{f\left(x+x_0-\sqrt{xx_0}\right)}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+f(x_0)\frac{x-x_0}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=\frac{f\left(x+x_0-\sqrt{xx_0}\right)}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{f(x_0)}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=\frac{f\left(x+x_0-\sqrt{xx_0}\right)}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}$$

Αφού f παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ συμπεραίνουμε ότι:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)\ \ \text{και}\ \ f\ \text{συνεχής στο}\ (0,+\infty)$$

Άρα,

$$\lim_{x\to x_0}\left(\sqrt{x}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{f(x_0)}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}\right)=\lim_{x\to x_0}\frac{f\left(x+x_0-\sqrt{xx_0}\right)}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x_0}f'(x_0) + \frac{f(x_0)}{2\sqrt{x_0}} = \frac{f(2x_0 - x_0)}{2\sqrt{x_0}} \Leftrightarrow \sqrt{x_0}f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = 0 \;\; \alpha\varphi o\acute{\upsilon} \; x_0 \in (0, +\infty)$$

Άρα, $f'(x) = 0$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$.
Οπότε, η f είναι σταθερή στο $(0, +\infty)$.

ii. Έστω $f(x) = c$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$ και $c \in \mathbb{R}$.
Αφού η συνάρτηση $e^{2kt^2 - f(t)}$ είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων τότε η

$$\int_1^x e^{2kt^2 - f(t)}\, dt$$

είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο $(0, +\infty)$. Παρατηρούμε ότι,

$$\lim_{x \to 1} \int_1^x e^{2kt^2 - f(t)}\, dt = \int_1^1 e^{2kt^2 - f(t)} dt = 0 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \lim_{x \to 1}(e^x - e) = 0$$

Επομένως, από τον Κανόνα De L' Hospital έχουμε:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\int_1^x e^{2kt^2 - f(t)}\, dt}{e^x - e} = \lim_{x \to 1} \frac{\left(\int_1^x e^{2kt^2 - c} dt\right)'}{(e^x - e)'} = \lim_{x \to 1} \frac{e^{2kx^2 - c}}{e^x} = \frac{e^{2k - c}}{e}$$

Οπότε,

$$\lim_{x \to 1} \frac{\int_1^x e^{2kt^2 - c} dt}{e^x - e} = e^{k^2 - 2013} \Leftrightarrow \frac{e^{2k - c}}{e} = e^{k^2 - 2013} \Leftrightarrow e^{2k - c} = e^{k^2 - 2012}$$

$$\Leftrightarrow 2k - c = k^2 - 2012 \Leftrightarrow k^2 - 2k + c - 2012 = 0 \quad (3)$$

Αφού υπάρχει μοναδική πραγματική τιμή για το k και η (3) είναι δευτεροβάθμια εξίσωση πρέπει

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow 4 - 4(c - 2012) = 0 \Leftrightarrow c = 2013$$

Συνεπώς, $f(x) = 2013$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

iii. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $x^2 + 1 \geq 1 > 0$.
Άρα, $f(x^2 + 1) = 2013$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Οπότε, η σχέση (2) γίνεται :

$$g'(x) < \frac{2014 \cdot x^{2013}}{x^{2014} + 1}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Για να δείξω ότι η C_g τέμνει τη C_h σ' ένα μόνο σημείο, αρκεί να δείξω ότι η εξίσωση

$$g(x) = h(x) \Leftrightarrow g(x) - h(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) - \ln(x^{2014} + 1) = 0$$

έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$.

Θέτω $\varphi(x) = g(x) - \ln(x^{2014} + 1)$, $x \in \mathbb{R}$.
Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων άρα και συνεχής. Οπότε,

$$\varphi'(x) = g'(x) - \frac{(x^{2014} + 1)'}{x^{2014} + 1} = g'(x) - \frac{2014x^{2013}}{x^{2014} + 1} < 0$$

Άρα, η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Στη συνέχεια, θα υπολογίσουμε το σύνολο τιμών της φ με τη βοήθεια του θεωρήματος Μέσης Τιμής.

Έστω $x > 0$. Η φ είναι συνεχής στο $[0, x]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, x)$.
Από θεώρημα Μέσης Τιμής, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (0, x)$ τέτοιο ώστε:

$$\varphi'(\xi_1) = \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} \Leftrightarrow x\varphi'(\xi_1) = \varphi(x) - \varphi(0) \Leftrightarrow \varphi(x) = x\varphi'(\xi_1) + \varphi(0)$$

Άρα,

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x\varphi'(\xi_1)+\varphi(0)\right)=(+\infty)\varphi'(\xi_1)=-\infty \quad \alpha\varphi o\acute{\upsilon}\ \varphi'(x)<0\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in\mathbb{R}$$

Έστω $x<0$. Η φ είναι συνεχής στο $[x,0]$ και παραγωγίσιμη στο $(x,0)$. Από Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_2\in(x,0)$ τέτοιο ώστε:

$$\varphi'(\xi_2)=\frac{\varphi(0)-\varphi(x)}{0-x}\Leftrightarrow -x\varphi'(\xi_2)=\varphi(0)-\varphi(x)\Leftrightarrow \varphi(x)=x\varphi'(\xi_2)+\varphi(0)$$

Άρα,

$$\lim_{x\to-\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x\varphi'(\xi_2)+\varphi(0)\right)=(-\infty)\,\varphi'(\xi_2)=+\infty\ \alpha\varphi o\acute{\upsilon}\ \varphi'(x)<0\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in\mathbb{R}$$

Αφού η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ το σύνολο τιμών της είναι το

$$\varphi(\mathbb{R})=\left(\lim_{x\to+\infty}f(x),\ \lim_{x\to-\infty}f(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$$

Επομένως, η εξίσωση $\varphi(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$ διότι το $0\in\varphi(\mathbb{R})$ και η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

iv.

$$\lim_{x\to+\infty}\int_{x+2012}^{x+2013}e^{t^{f\left(\sqrt{t^2+1}\right)}}dt=\lim_{x\to+\infty}\left(\int_{x+2012}^{0}e^{t^{2013}}dt+\int_{0}^{x+2013}e^{t^{2013}}dt\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\int_{0}^{x+2013}e^{t^{2013}}dt-\int_{0}^{x+2012}e^{t^{2013}}dt\right)$$

Θέτω

$$G(x)=\int_0^x e^{t^{2013}}dt,\ x\geq 0$$

Η G είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ αφού $e^{t^{2013}}$ συνεχής ως σύνθεση συνεχών, με $G'(x)=e^{x^{2013}}>0$.
Άρα, η G είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Η G είναι συνεχής στο $[x+2012,x+2013]$ με $x>0$ και παραγωγίσιμη στο $(x+2012,x+2013)$.
Από θεώρημα Μέσης Τιμής, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(x+2012,x+2013)$ τέτοιο ώστε:

$$G'(\xi)=\frac{G(x+2013)-G(x+2012)}{x+2013-(x+2012)}\Leftrightarrow G'(\xi)=G(x+2013)-G(x+2012)$$
$$\Leftrightarrow G'(\xi)=\int_0^{x+2013}e^{t^{2013}}dt-\int_0^{x+2012}e^{t^{2013}}dt$$

Όμως, η G' είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ διότι $G''(x)=e^{x^{2013}}(x^{2013})'=2013x^{2012}e^{x^{2013}}>0$ για κάθε $x>0$

Οπότε, $x+2012<\xi<x+2013\Leftrightarrow G'(x+2012)<G'(\xi)<G'(x+2013)$

$$\Leftrightarrow e^{(x+2012)^{2013}}<\int_0^{x+2013}e^{t^{2012}}dt-\int_0^{x+2012}e^{t^{2012}}dt<e^{(x+2013)^{2013}}$$

Όμως,

$$\lim_{x\to+\infty}e^{(x+2012)^{2013}}=+\infty\ \kappa\alpha\iota\ \lim_{x\to+\infty}e^{(x+2013)^{2013}}=+\infty$$

Άρα, από κριτήριο Παρεμβολής

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\int_0^{x+2013}e^{t^{2013}}dt-\int_0^{x+2012}e^{t^{2013}}dt\right)=+\infty\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}\int_{x+2012}^{x+2013}e^{t^{f\left(\sqrt{t^2+1}\right)}}dt=+\infty$$

Β' τρόπος:
Θέτω $G(t)=e^{t^{2013}}$, με $t\in[x+2012,x+2013]\kappa\alpha\iota\ x>0$.

Η G είναι παραγωγίσιμη στο $[x+2012, x+2013]$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων άρα και συνεχής με, $G'(t) = e^{t^{2013}}(t^{2013})' = 2013t^{2012}e^{t^{2013}} > 0$ για κάθε $t \in [x+2012, x+2013], \mu\varepsilon\ x > 0$.

Άρα, η G είναι γνησίως αύξουσα στο $[x+2012, x+2013]$ και έχουμε:

$$x+2012 \le t \le x+2013 \Leftrightarrow G(x+2012) \le G(t) \le G(x+2013)$$

Άρα, $\int_{x+2012}^{x+2013} G(x+2012)\,dt \le \int_{x+2012}^{x+2013} G(t)\,dt \le \int_{x+2012}^{x+2013} G(x+2013)\,dt$

$$\Leftrightarrow G(x+2012)[t]_{x+2012}^{x+2013} \le \int_{x+2012}^{x+2013} G(t)dt \le G(x+2013)[t]_{x+2012}^{x+2013} \Leftrightarrow e^{(x+2012)^{2013}} \le \int_{x+2012}^{x+2013} G(t)dt$$
$$\le e^{(x+2013)^{2013}}$$

Όμως,
$\lim_{x\to+\infty} e^{(x+2012)^{2013}} = +\infty\ \kappa\alpha\iota\ \lim_{x\to+\infty} e^{(x+2013)^{2013}} = +\infty$

Άρα από Κριτήριο Παρεμβολής, $\lim_{x\to+\infty} \int_{x+2012}^{x+2013} e^{t^{2013}}\,dt = +\infty$

ΘΕΜΑ 2

A. Εάν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α,β] τότε να δειχθεί ότι:

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)\,dx\right| \le \int_\alpha^\beta |f(x)|\,dx$$

B.

i. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η οποία είναι «1-1» στο $\mathbb{R}$ και ισχύει ότι

$$F(x) = \int_2^{|z|} f(x+t)\,dt,\ \ z \in \mathbb{C}.$$

Αν υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε η γραφική παράσταση της F να δέχεται οριζόντια εφαπτομένη στο σημείο $A(\xi, F(\xi))$, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού z.

ii. Να υπολογισθεί το όριο

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{2012}} \int_x^{x+1} |t\cdot z + \sqrt{t^2+1}\cdot z^2|\,dt,$$

όπου z ο μιγαδικός του παραπάνω ερωτήματος.

C. Έστω μια συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύουν: $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ και $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha,\beta)$.

i. Να δείξετε ότι υπάρχουν

$$\xi_1, \xi_2 \in (\alpha,\beta)\ \mu\varepsilon\ \xi_1 < \xi_2\ \tau\acute{\varepsilon}\tau o\iota\alpha\ \acute{\omega}\sigma\tau\varepsilon\ f'(\xi_2) - f'(\xi_1) > \frac{2m}{\alpha-\beta}\ \ \acute{o}\pi o\upsilon\ m = \min f(x)\ \ \sigma\tau o\ [\alpha,\beta]$$

ii. Να δείξετε ότι:

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{|f''(x)|}{f(x)}\,dx < \frac{2}{\alpha-\beta}$$

ΛΥΣΗ

Α. Για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ ισχύει ότι $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$.
Αφού f συνεχής στο [α,β] έπεται ότι $|f|$ συνεχής στο [α,β].
Οπότε,

$$-\int_\alpha^\beta |f(x)|\,dx \le \int_\alpha^\beta f(x)\,dx \le \int_\alpha^\beta |f(x)|\,dx \Leftrightarrow \left|\int_\alpha^\beta f(x)\,dx\right| \le \int_\alpha^\beta |f(x)|\,dx$$

Β.

i. Θέτω $x+t=u\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ dt=du$.
Για $t=2$ έχουμε $u=x+2$.
Για $t=|z|$ έχουμε $u=x+|z|$.
Άρα,

$$F(x)=\int_2^{|z|} f(x+t)dt=\int_{x+2}^{x+|z|} f(u)du=\int_{x+2}^{0} f(u)du+\int_0^{x+|z|} f(u)du=\int_0^{x+|z|} f(u)du-\int_0^{x+2} f(u)du$$

Η F είναι παραγωγίσιμη αφού f συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$, με

$$F'(x)=f(x+|z|)\cdot(x+|z|)'-f(x+2)\cdot(x+2)'\Leftrightarrow F'(x)=f(x+|z|)-f(x+2),\ \ x\in\mathbb{R}.$$

Αφού η C_F δέχεται οριζόντια εφαπτομένη στο σημείο $A(\xi,F(\xi))$ έπεται ότι

$$F'(\xi)=0\Leftrightarrow f(\xi+|z|)-f(\xi+2)=0\Leftrightarrow f(\xi+|z|)=f(\xi+2)\overset{f\,\text{"1−1"}}{\Longleftrightarrow}\xi+|z|=\xi+2\Leftrightarrow|z|=2$$

Οπότε, ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού z είναι ο κύκλος με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=2$.

ii. Αφού $x\to+\infty$, έχουμε ότι $x>0$.
Άρα,

$$\left|\frac{1}{x^{2012}}\int_x^{x+1}\left|t\cdot z+\sqrt{t^2+1}\cdot z^2\right|dt\right|=\frac{1}{x^{2012}}\left|\int_x^{x+1}\left|t\cdot z+\sqrt{t^2+1}\cdot z^2\right|dt\right|$$
$$\le\frac{1}{x^{2012}}\int_x^{x+1}\left|t\cdot z+\sqrt{t^2+1}\cdot z^2\right|dt\le\frac{1}{x^{2012}}\int_x^{x+1}\left(|t\cdot z|+\left|\sqrt{t^2+1}\cdot z^2\right|\right)dt$$
$$=\frac{1}{x^{2012}}\int_x^{x+1}\left(t|z|+\sqrt{t^2+1}|z|^2\right)dt=\frac{1}{x^{2012}}\int_x^{x+1}\left(2t+4\sqrt{t^2+1}\right)dt$$

Δηλαδή,

$$\left|\frac{1}{x^{2012}}\int_x^{x+1}\left|t\cdot z+\sqrt{t^2+1}\cdot z^2\right|dt\right|\le\frac{2}{x^{2012}}\int_x^{x+1}\left(t+2\sqrt{t^2+1}\right)dt,\qquad \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x>0\quad(1)$$

Θέτω $g(t)=t+2\sqrt{t^2+1}, t\in[x,x+1]\ \ \mu\varepsilon\ \ x>0$.
Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[x,x+1]$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων άρα και συνεχής στο $[x,x+1]$.
Οπότε,

$$g'(t)=1+\frac{2(t^2+1)'}{2\sqrt{t^2+1}}=1+\frac{2t}{\sqrt{t^2+1}}>0\ \ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ t\in[x,x+1],\mu\varepsilon\ x>0$$

Άρα, η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[x,x+1]$.

Επομένως, για κάθε $t \leq x+1$ έχουμε $g(t) \leq g(x+1)$. Οπότε,

$$\int_x^{x+1} g(t)\,dt \leq \int_x^{x+1} g(x+1)dt \Leftrightarrow \int_x^{x+1} g(t)\,dt \leq g(x+1)\cdot [t]_x^{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \int_x^{x+1}\left(t+2\sqrt{t^2+1}\right)dt \leq x+1+2\sqrt{(x+1)^2+1}$$

Συνεπώς, η (1) γίνεται

$$\left|\frac{1}{x^{2012}}\int_x^{x+1}\left|t\cdot z+\sqrt{t^2+1}\cdot z^2\right|dt\right| \leq \frac{2}{x^{2012}}\left(x+1+2\sqrt{(x+1)^2+1}\right)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{x^{2012}}\left(x+1+2\sqrt{x^2+2x+2}\right) \leq \frac{1}{x^{2012}}\int_x^{x+1}\left|t\cdot z+\sqrt{t^2+1}\cdot z^2\right|dt$$

$$\leq \frac{2}{x^{2012}}\left(x+1+2\sqrt{x^2+2x+2}\right)$$

Όμως,

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{x^{2012}}\left(x+1+2\sqrt{x^2+2x+2}\right)\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{2\left(x+1+2x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}\right)}{x^{2012}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{2x\left(1+\frac{1}{x}+2\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}\right)}{x^{2012}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2\left(1+\frac{1}{x}+2\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}\right)}{x^{2011}}$$

$$= 0\cdot\left(1+0+2\sqrt{1+0+0}\right) = 0$$

και

$$\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{2}{x^{2012}}\left(x+1+2\sqrt{x^2+2x+2}\right)\right] = 0$$

Οπότε, από Κριτήριο Παρεμβολής έπεται ότι,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{2012}}\int_x^{x+1}\left|t\cdot z+\sqrt{t^2+1}\cdot z^2\right|dt = 0$$

C.

i. Αφού η f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$, τότε παίρνει στο $[\alpha,\beta]$ μία ελάχιστη τιμή $m<0$ επειδή $f(x)<0=f(\alpha)=f(\beta),\ \text{για κάθε } x\in(\alpha,\beta)$. Δηλαδή υπάρχει $\xi\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=m$.

- Η f είναι συνεχής σε καθένα από τα [α,ξ], [ξ,β].
- Η f είναι παραγωγίσιμη σε καθένα από τα (α,ξ), (ξ,β).

Άρα, από το Θεώρημα Μέσης τιμής υπάρχει ένα τουλάχιστον

$\xi_1\in(\alpha,\xi)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1)=\dfrac{m}{\xi-\alpha}$ και $\xi_2\in(\xi,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_2)=-\dfrac{m}{\beta-\xi}$

$$\text{Οπότε}, f'(\xi_2)-f'(\xi_1) = -\frac{m}{\beta-\xi}-\frac{m}{\xi-\alpha} > -\frac{2m}{\beta-\alpha} = \frac{2m}{\alpha-\beta}$$

αφού $\beta-\alpha>\beta-\xi \Leftrightarrow \dfrac{1}{\beta-\alpha}<\dfrac{1}{\beta-\xi} \Leftrightarrow -\dfrac{m}{\beta-\alpha}<-\dfrac{m}{\beta-\xi}$ και ομοίως αποδεικνύεται ότι

$$-\frac{m}{\beta-\alpha}<-\frac{m}{\xi-\alpha}$$

ii. Για κάθε $x\in[\xi_1,\xi_2]$ ισχύει:

$$\frac{|f''(x)|}{f(x)} \leq \frac{|f''(x)|}{m} \quad \text{αφού } f(x)\geq m \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)}\leq\frac{1}{m}$$

Άρα,

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2}\frac{|f''(x)|}{f(x)}dx \le \int_{\xi_1}^{\xi_2}\frac{|f''(x)|}{m}dx \Leftrightarrow -\int_{\xi_1}^{\xi_2}\frac{|f''(x)|}{f(x)}dx \ge -\frac{1}{m}\int_{\xi_1}^{\xi_2}|f''(x)|\,dx$$

$$\overset{(A)}{\Leftrightarrow} \int_{\xi_2}^{\xi_1}\frac{|f''(x)|}{f(x)}dx \ge -\frac{1}{m}\left|\int_{\xi_1}^{\xi_2}f''(x)dx\right| \Leftrightarrow \int_{\xi_2}^{\xi_1}\frac{|f''(x)|}{f(x)}\,dx \ge -\frac{1}{m}|f'(\xi_2)-f'(\xi_1)|$$

$$\overset{f'(\xi_2)-f'(\xi_1)>0}{\Longleftrightarrow} \int_{\xi_2}^{\xi_1}\frac{|f''(x)|}{f(x)}dx \ge -\frac{1}{m}\cdot\left(f'(\xi_2)-f'(\xi_1)\right) > -\frac{1}{m}\cdot\frac{2m}{\alpha-\beta}=\frac{2}{\beta-\alpha}$$

Συνεπώς,

$$\int_{\xi_2}^{\xi_1}\frac{|f''(x)|}{f(x)}dx > \frac{2}{\beta-\alpha} \Leftrightarrow \int_{\xi_1}^{\xi_2}\frac{|f''(x)|}{f(x)}dx < \frac{2}{\alpha-\beta}$$