

**ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**  
**ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ**  
**ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Να δείξετε ότι αν μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο του  $x_0$  τότε είναι και συνεχής σε αυτό.

**A2.** Να διατυπώσετε τον ορισμό της αρχικής συνάρτησης  $F$  μιας συνάρτησης  $f$ .

**A3.** Να διατυπώσετε τον ορισμό του σημείου καμπής μιας συνάρτησης  $f$ .

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος:

1. Έστω μία συνάρτηση  $f$  συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του διαστήματος  $\Delta$ . Αν  $f''(x) > 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$  τότε η  $f$  είναι κοίλη στο  $\Delta$ .

2. Αν μία συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή στο διάστημα  $\Delta$  τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  σε κάθε σημείο του  $\Delta$  βρίσκεται κάτω από την γραφική παράσταση της  $f$ .

3. Αν  $f, g$  είναι δύο συναρτήσεις με συνεχή πρώτη παράγωγο τότε ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \cdot g'(x) dx = [f(x) \cdot g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x) \cdot g(x) dx$$

4. Αν  $f, g$  είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο σημείο  $x_0$  και ισχύει

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g'(x_0)$$

**ΘΕΜΑ Β**

Έστω μία συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη στο  $[1,2]$  όπου η γραφική παράσταση της συνάρτησης τέμνει τον άξονα  $x'x$  στο σημείο  $A(2,0)$ .

**B1.** Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi \in (1,2)$  τέτοιο ώστε

$$f(\xi) = -\xi \cdot \ln \xi \cdot f'(\xi)$$

**B2.** Αν  $h(x) = 3x^2 - 2x$  να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $g(x) = \ln x \cdot h(x)$  στο σημείο της  $A(1, g(1))$ .

**B3.** Να αποδείξετε ότι  $\ln x \cdot (3x^2 - 2x) \geq x - 1$  για κάθε  $x \geq 1$ .

**B4.** Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα  $\int_1^e g(x) dx$ .

### ΘΕΜΑ Γ

**Γ1.** Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση  $f(x) = x \cdot \ln x$  και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

**Γ2.** Να δείξετε ότι η εξίσωση  $x^x = e^{2016}$  έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα  $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ .

**Γ3.** Αν  $\alpha, \beta, \gamma \in (0, +\infty)$  με  $\alpha < \beta < \gamma$  να αποδείξετε ότι  $(\gamma - \beta) \cdot \ln \frac{\beta^\beta}{\alpha^\alpha} < (\beta - \alpha) \cdot \ln \frac{\gamma^\gamma}{\beta^\beta}$ .

Γ4. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ ,  $C_f$ , τον άξονα  $x'x$  και την ευθεία  $x = \frac{1}{e}$ .

#### ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} - \{-1\}$ , παραγωγίσιμη με  $(x+1)^2 \cdot f'(x) = e^{x+1}$ , όπου  $f(0) = e$ . Δίνονται ακόμα οι συναρτήσεις με τύπους:

- $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 2$
- $L(x) = \frac{(\ln x - \sqrt{1-x}) \cdot \int_1^2 (x+1)^2 \cdot f'(x) dx}{e^3}$

Δ1. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης  $f$ .

Δ2. Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης  $f(g(x)) = \frac{e^2}{2}$  στο  $(0, +\infty)$ .

Δ3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $L(x)$  αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντιστρόφου  $L^{-1}(x)$ .

Δ4. Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \cdot L^{-1}(x))$ .

**ΟΡΟΣΗΜΟ ΠΕΙΡΑΙΑ**

**ΚΑΤΣΙΜΠΡΑΣ ΕΥΘΥΜΗΣ**