ΣΧΕΔΙΟ ΒΑΘΜΟΛΟΓΗΣΗΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΘΕΜΑΤΩΝ 1

ΣΑΒΒΑΤΟ, 11 ΜΑΡΤΙΟΥ 2017

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. i. Να διατυπώσετε το θεώρημα των ενδιαμέσων τιμών και στη συνέχεια να το αποδείξετε

ii. Να δώσετε ένα παράδειγμα σχεδιάζοντας ένα πρόχειρο σχήμα για μια συνεχή συνάρτηση f στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, η οποία **δεν** παίρνει υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές ανάμεσα στα $f(\alpha), f(\beta)$.

Comment [D1]: 2M

Comment [D2]: 4M

Comment [D3]: 1M

Comment [D4]: 1M

Α2. Να βρείτε το **λάθος** στον επόμενο συλλογισμό **.** Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας **.**

Comment [D5]: 2M

Comment [D6]: 2M

$$I=\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx=\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+\frac{1}{u^2}}\cdot\left(-\frac{1}{u^2}\right)du=-\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+u^2}du=-I$$

(θέσαμε $x=\frac{1}{u}$, οπότε $dx=-\frac{1}{u^2}$).

Άρα $I=-I$, οπότε $I=0$. Αυτό, όμως, είναι άτοπο, αφού $I=\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx>0$, επειδή $\frac{1}{1+x^2}>0$ για κάθε $x\in[-1, 1]$.

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν f,g,h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $ho(gof)$, τότε ορίζεται και η $(hog)of$ και ισχύει $ho(gof)=(hog)of$.

Comment [D7]: 2M

β) Για κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι $[f(\alpha), f(\beta)]$ ή $[f(\beta), f(\alpha)]$.

Comment [D8]: 2M

γ) Αν για κάθε συνάρτηση f και για ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της που ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$, τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

Comment [D9]: 2M

δ) Μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a,\beta]$ δεν έχει ασύμπτωτες.

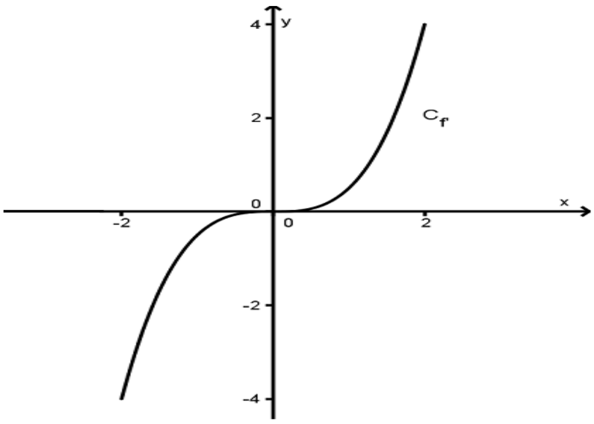
Comment [D10]: 2M

ε) Για όλες τις συνεχείς στο R συναρτήσεις με $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx \ (\alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{R})$, ισχύει $\beta = \gamma$.

Comment [D11]: 2M

A4. Στο επόμενο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας συνάρτησης f στο διάστημα $[-2, 2]$. Επιλέξτε τη σωστή απάντηση:

Comment [D12]: 3M



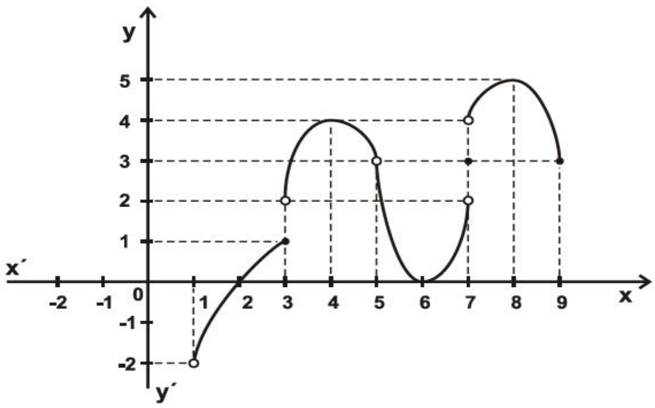
Το σημείο $A\left(0, f(0)\right)$ είναι:

1. θέση τοπικού μέγιστου της f
2. θέση τοπικού ελάχιστου της f
3. σημείο καμπής της C_f

ΕΡΩΤΗΜΑ	Α1		Α2	Α3					Α4
ΜΟΝΑΔΕΣ	Ι			α	β	γ	δ	ε	
	ΙΙ								
ΣΥΝΟΛΑ									
ΓΕΝΙΚΟ ΣΥΝΟΛΟ									

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f.



B1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f.

Comment [D13]: 1M
Comment [D14]: 1M

B2. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

α) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ β) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ γ) $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$

δ) $\lim\limits_{x\to 7} f(x)$ ε) $\lim\limits_{x\to 9} f(x)$

Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Comment [D15]: 1M
Comment [D16]: 1M
Comment [D17]: 1M
Comment [D18]: 1M
Comment [D19]: 1M
Comment [D20]:

B3. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

α) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{f(x)}$ β) $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{1}{f(x)}$ γ) $\lim\limits_{x\to 8} f\big(f(x)\big)$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Comment [D21]: 2M
Comment [D22]: 2M
Comment [D23]: 2M
Comment [D24]: 1x3=3

B4. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Comment [D25]: 2M
Comment [D26]: 1m

B5. Να βρείτε τα σημεία x_0 του πεδίου ορισμού της f για τα οποία ισχύει $f΄(x_0) = 0$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Comment [D27]: 2M
Comment [D28]: 2M

<table>
<tr><th>ΕΡΩΤΗΜΑ</th><th colspan="2">B1</th><th>B2</th><th colspan="5">B3</th><th>B4</th></tr>
<tr><td>ΜΟΝΑΔΕΣ</td><td>I</td><td></td><td rowspan="2"></td><td>α</td><td>β</td><td>γ</td><td>δ</td><td>ε</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td>II</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>ΣΥΝΟΛΑ</td><td colspan="2"></td><td></td><td colspan="5"></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="10">ΓΕΝΙΚΟ ΣΥΝΟΛΟ</td></tr>
</table>

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=e^x+2x+1,\ x\in[-1,\ 0]$.

Εφαρμόζουμε το Θ. Bolzano για την g στο $[-1,\ 0]$

Comment [D29]: 1 M

- Η g είναι συνεχής στο $[-1,\ 0]$ (ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων στο $[-1,\ 0]$).

Comment [D30]: 1 M

- $g(0)=2>0$

Comment [D31]: 0,5M

- $g(-1)=\dfrac{1}{e}-1<0$

Comment [D32]: 0,5M

Άρα υπάρχει $a\in(-1,\ 0)$ τέτοιο, ώστε $g(a)=0 \Leftrightarrow e^a+2a+1=0$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,\ 0)$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $(-1,\ 0)$), με $g'(x)=e^x+2>0$ για κάθε $x\in(-1,\ 0)$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $[-1,\ 0]$ η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1,\ 0]$, άρα και «1-1» , δηλαδή η η g έχει μοναδική ρίζα την $x=a$.

Comment [D33]: 1M

Comment [D34]: 1M

Γ2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με $f'(x)=e^x+2x+1,\ x\in\mathbb{R}$. Άρα $f'(x)=g(x)$ και η g έχει μοναδική ρίζα την $x=a$.

Comment [D35]: 1M

Έχουμε:

$$x<a \Rightarrow g(x)<g(a) \Rightarrow f'(x)<0$$
$$x>a \Rightarrow g(x)>g(a) \Rightarrow f'(x)>0$$

Comment [D36]: 1M

Δηλαδή $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,\ \alpha)$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $(-\infty,\ \alpha]$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,\ \alpha]$. Ακόμα $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(a,\ +\infty)$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\ +\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,\ +\infty)$.

Comment [D37]: 0,5M

Comment [D38]: 0,5M

Επομένως η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x=\alpha$, το $f(a)=e^a+a^2+\alpha$ (1).

Comment [D39]: 0,5M

Όμως έχουμε:

$$g(a)=0 \Leftrightarrow e^a+2a+1=0 \Leftrightarrow e^a=-2a-1 \ (2)$$

Comment [D40]: 0,5M

Άρα η (1) δίνει:

$$f(a)=e^a+\alpha^2+\alpha=-2a-1+\alpha^2+\alpha=\alpha^2-\alpha-1$$

Comment [D41]: 0,5M

Άρα έχουμε:

$$f(x)\ge f(a) \Rightarrow f(x)\ge \alpha^2-\alpha-1 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Comment [D42]: 0,5M

Γ3. Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}(e^x+x^2+x)=+\infty \text{ και } \lim_{x\to-\infty}(e^x+x^2+x)=\lim_{x\to-\infty}\left[x^2\left(\frac{e^x}{x^2}+1+\frac{1}{x}\right)\right]=+\infty.$$

Comment [D43]: 0,5M

Comment [D44]: 0,5M

Αν $\Delta_1=\left(-\infty,\ \alpha\right],\ \Delta_2=\left[\alpha,+\infty\right)$ με θα έχουμε:

$$f(\Delta_1)=\left[\alpha^2-\alpha-1,\ +\infty\right)$$
$$f(\Delta_1)=\left[\alpha^2-\alpha-1,\ +\infty\right)$$ (επειδή η f γν. φθίνουσα στο Δ_1 και γν. αύξουσα στο Δ_2)

Comment [D45]: 1M

Είναι:

$$\alpha\in(-1,\ 0)\Rightarrow -1<\alpha<0\Rightarrow\begin{cases}0<\alpha^2<1\\0<-\alpha<1\end{cases}\Rightarrow -1<\alpha^2-\alpha-1<1 \text{ και } \frac{2017}{2016}>1.$$

Comment [D46]: 1M

Επομένως:

- $\frac{2017}{2016}\in f(\Delta_1)$, άρα υπάρχει $\rho_1\in(-\infty,\ a)$ τέτοιος, ώστε $f(\rho_1)=\frac{2017}{2016}$ και είναι μοναδικός αφού η f, ως γνησίως φθίνουσα στο Δ_1 ,είναι και «1-1».

Comment [D47]: 1M

- $\frac{2017}{2016}\in f(\Delta_2)$, άρα υπάρχει $\rho_2\in(\alpha,+\infty)$ τέτοιος, ώστε $f(\rho_2)=\frac{2017}{2016}$ και είναι μοναδικός αφού η f, ως γνησίως αύξουσα στο Δ_2, είναι και «1-1».

Comment [D48]: 1M

Επομένως η f έχει δύο ακριβώς ρίζες, τις $\rho_1,\ \rho_2$.

Γ4. Η σχέση που θέλουμε να αποδείξουμε γράφεται διαδοχικά:

$$f(x^2+1)+f(x^2+2)<f(x^2)+f(x^2+3)\Leftrightarrow f(x^2+1)-f(x^2)<f(x^2+3)-f(x^2+2)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\frac{f(x^2+1)-f(x^2)}{(x^2+1)-x^2}<\frac{f(x^2+3)-f(x^2+2)}{(x^2+3)-(x^2+2)}\quad(1)$$

Comment [D49]: 1M

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού για την συνάρτηση f στα διαστήματα $\left[x^2,\ x^2+1\right]$ και $\left[x^2+2,\ x^2+3\right], x\in\mathbb{R}$:

Comment [D50]: 1 M

- Η f παραγωγίσιμη στα διαστήματα $\left[x^2,\ x^2+1\right]$ και $\left[x^2+2,\ x^2+3\right], x\in\mathbb{R}$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο). Άρα η f είναι και συνεχής στα διαστήματα αυτά. Επομένως υπάχουν αντίστοιχα

$$\xi_1\in\left(x^2,x^2+1\right),\ \xi_2\in\left(x^2+2,\ x^2+3\right) \text{ με:}$$

$$f'(\xi_1)=\frac{f(x^2+1)-f(x^2)}{(x^2+1)-x^2} \text{ και } f'(\xi_2)=\frac{f(x^2+3)-f(x^2+2)}{(x^2+3)-(x^2+2)}$$

Comment [D51]: 2 M (1+1)

Έτσι η προς απόδειξη σχέση (1) γίνεται $f'(\xi_1)<f'(\xi_2)$, η οποία είναι αληθής αφού:

$\xi_1<\xi_2\Rightarrow f'(\xi_1)<f'(\xi_2)$, επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ διότι $f''(x)=e^x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (f' συνεχής στο $\mathbb{R}$).

Comment [D52]: 1M

Γ5. Έχουμε ότι $y(t)=e^{x(t)}+x^2(t)+x(t),\ t\geq0\quad(2)$. Τα μέλη της σχέσης (2) είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις για κάθε $t\geq0$ (ως πράξεις και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων για κάθε $t\geq0$). Επομένως έχουμε:

Comment [D53]: 0,5M

Comment [D54]: 0,5M

$$y'(t)=e^{x(t)}\cdot x'(t)+2x(t)\cdot x'(t)+x'(t)\Leftrightarrow y'(t)=x'(t)\left(e^{x(t)}+2x(t)+1\right)(3)$$

Comment [D55]: 2

Άν $t=t_0$ είναι η χρονική στιγμή που το σημείο Μ διέρχεται από το $x(t_0)=\alpha\in(-1,\ 0)$, τότει ισχύει $x(t_0)=\alpha\in(-1,\ 0)$.

Η σχέση (3) για $t=t_0$ γίνεται:

$$y'(t_0)=x'(t_0)\left(e^{x(t_0)}+2x(t_0)+1\right)\ (4)$$

Comment [D56]: 0,5M

Ισχύει ακόμα ότι $e^{x(t_0)}+2x(t_0)+1=e^{\alpha}+2\alpha+1=0$ (5). Η σχέση (4), λόγω της σχέσης (5) γίνεται $y'(t_0)=x'(t_0)\cdot 0=0$.

Comment [D57]: 1,5 M

ΕΡΩΤΗΜΑ	Γ1	Γ2	Γ3	Γ4
ΜΟΝΑΔΕΣ				
ΣΥΝΟΛΑ				
ΓΕΝΙΚΟ ΣΥΝΟΛΟ				

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. i. Έχουμε διαδοχικά:

$$\sigma\upsilon\nu x-f'(x)=\sigma\upsilon\nu x-x\cdot\eta\mu x\Leftrightarrow f'(x)=x\cdot\eta\mu x\Leftrightarrow(\eta\mu x-f(x))'=(x\sigma\upsilon\nu x)'\Leftrightarrow$$

$$f(x)=\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x+c$$

Comment [D58]: 2M

για $x=0$ έχουμε $f(0)=0+c\Leftrightarrow 0=c\Leftrightarrow c=0$

άρα:

$$f(x)=\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x$$

Comment [D59]: 1M

ii. $f(x)=\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ με

$f'(x)=x\eta\mu x>0$, $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

και η f είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ και ισχύει:

Comment [D60]: 2M

$$0<\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x\Leftrightarrow 0<x<\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow f(0)<f(x)\Leftrightarrow\eta\mu x>x\sigma\upsilon\nu x$$

Comment [D61]: 1M

Δ2. $g(x)=|x\varepsilon\varphi x-x^2|=|x|\cdot|\varepsilon\varphi x-x|$. Από το ερώτημα β) ισχύει:

$$\eta\mu x>x\sigma\upsilon\nu x,\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow\varepsilon\varphi x>x.$$

‘Εχουμε:

- αν $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ τότε $-x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και ισχύει:

$$\varepsilon\varphi(-x) > -x \Leftrightarrow -\varepsilon\varphi x > -x \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x < x$$

για $x = 0 \Rightarrow g(0) = 0$

Άρα $g(x) = x\varepsilon\varphi x - x^2$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Comment [D62]: 1M (εξαγωγή απολύτου)

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$) με:

$$g'(x) = \left(x\varepsilon\varphi x - x^2\right)' = \varepsilon\varphi x - 2x + \frac{x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = (\varepsilon\varphi x - x) + \frac{x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - x =$$

$$= (\varepsilon\varphi x - x) + x\left(\frac{1 - \sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\right) = (\varepsilon\varphi x - x) + x \cdot \varepsilon\varphi^2 x$$

Comment [D63]: 1M

- αν $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τότε $\varepsilon\varphi x - x > 0$ και $x \cdot \varepsilon\varphi^2 x > 0$ άρα $g'(x) > 0$
- αν $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ τότε $\varepsilon\varphi x - x < 0$ και $x \cdot \varepsilon\varphi^2 x < 0$ άρα $g'(x) < 0$
- για $x = 0 \Rightarrow g'(0) = 0$

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

Comment [D64]: (1,5M)

Η g παρουσιάζει για x=0 ολικό ελάχιστο το g(0)=0 .

Comment [D65]: (0,5M)

$2^{ος}$ τρόπος:

$$g'(x) = \left(x\varepsilon\varphi x - x^2\right)' = \varepsilon\varphi x - 2x + \frac{x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x + x - 2x\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} =$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu x \cdot (\eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x) + x\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

- $g'(0) = 0$
- αν $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τότε $\sigma\upsilon\nu x > 0$, $\eta\mu x > x\sigma\upsilon\nu x$ και $x \cdot \eta\mu^2 x > 0$, άρα $g'(x) > 0$

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

.έστω $x_1, x_2 \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ με $x_1 < x_2$ τότε:

$$-x_1 > -x_2 \Rightarrow g(-x_1) > g(-x_2) \Rightarrow g(x_1) > g(x_2)$$

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$

Η g παρουσιάζει για x=0 ολικό ελάχιστο το g(0)=0 .

Δ3. i. $g(x)=a$, όπου $a>0$

- $g\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\right)=[0,+\infty)$ και $a\in[0,+\infty)$, άρα υπάρχει μοναδικό $x_o\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

(γιατί η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$) τέτοιο, ώστε $g(x_o)=a$

- $-x_o\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ και $g(-x_o)=(-x_o)\varepsilon\varphi(-x_o)-(-x_o)^2=g(x_o)=a$

Το $-x_o$ είναι μοναδικό (γιατί η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\frac{\pi}{2},0\right]$)

Άρα το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης $g(x)=a$, όταν $a>0$ είναι : $-x_o+x_o=0$.

Comment [D66]: 1,5 M
Comment [D67]: 1 M
Comment [D68]: 1M
Comment [D69]: 0,5M

ii. Επειδή x_1 , x_2 , x_3 οι θετικές ρίζες των εξισώσεων

$g(x)=1$, $g(x)=2$, $g(x)=3$ αντίστοιχα, έχουμε:

$$g(x_1)=1,\ g(x_2)=2,\ g(x_3)=3$$

Comment [D70]: 0,5M

και είναι:

$$1<2<3\Leftrightarrow g(x_1)<g(x_2)<g(x_3)\Leftrightarrow x_1<x_2<x_3$$

Comment [D71]: 1M

από την εφαρμογή του Θ.Μ.Τ για την g στα $[x_1,x_2]$, $[x_2,x_3]$(αφού πληρούνται οι προϋποθέσεις διότι g παραγωγίσιμη στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, επομένως και στα $[x_1,x_2],[x_2,x_3]$, άρα και συνεχής σε αυτά) έχουμε:

Comment [D72]: 2M

$$(x_2-x_1)\cdot g'(\xi_1)=g(x_2)-g(x_1)=2-1=1\quad ,\xi_1\in(x_1,x_2)$$
$$(x_3-x_2)\cdot g'(\xi_2)=g(x_3)-g(x_2)=3-2=1\quad ,\xi_2\in(x_2,x_3)$$

Προσθέτοντας τις προηγούμενες σχέσεις κατά μέλη προκύπτει:

Comment [D73]: 0,5M

$$(x_2-x_1)\cdot g'(\xi_1)+(x_3-x_2)\cdot g'(\xi_2)=2$$

Δ4.

i. ι. $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln[\eta\mu x-f(x)]-\ln x+x^2}{\eta\mu^2x-x\sigma\upsilon\nu x+x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(\sigma\upsilon\nu x)+x^2}{\eta\mu^2x-x\sigma\upsilon\nu x+x}\overset{D.L.P}{=}$

$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{-\varepsilon\varphi x+2x}{2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu x+x\eta\mu x+1}\overset{D.L.P}{=}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{-\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2x}+2}{2\sigma\upsilon\nu^2x-2\eta\mu^2x+2\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x}=$

$\dfrac{-\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 0}+2}{2\sigma\upsilon\nu^2 0-2\eta\mu^2 0+2\eta\mu 0+0\sigma\upsilon\nu 0}=\dfrac{1}{2}$

Comment [D74]: 1M
Comment [D75]: 1M
Comment [D76]: 1M

$2^{ος}$ τρόπος:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left[\eta\mu x - f(x)\right]-\ln x + x^2}{\eta\mu^2 x - x\sigma\upsilon\nu x + x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\sigma\upsilon\nu x)+x^2}{\eta\mu^2 x - x\sigma\upsilon\nu x + x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{\ln(\sigma\upsilon\nu x)}{x^2}+1}{\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)^2 - \dfrac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x}} = l$$

- $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(\sigma\upsilon\nu x)}{x^2} \overset{D.L.H}{=} \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-\varepsilon\varphi x}{2x} \overset{D.L.H}{=} \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-1}{2\sigma\upsilon\nu^2 x} = -\dfrac{1}{2}$
- $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)^2 = 1^2 = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} \overset{D.L.H}{=} \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-\eta\mu x}{1} = 0$

Άρα:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left[\eta\mu x - f(x)\right]-\ln x + x^2}{\eta\mu^2 x - x\sigma\upsilon\nu x + x} = \frac{-\dfrac{1}{2}+1}{1-0} = \frac{1}{2}$$

ii. Για $0 < x \le \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x > 0$ (I) (από το ερώτημα Δ1 ii) και $x\eta\mu x > 0$ (II) για κάθε $x \in \left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$. Άρα με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε:

$$\eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x + x\eta\mu x > 0 \text{ (III), για κάθε } x \in \left(0,\ \frac{\pi}{2}\right]$$

Άρα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, $-f'$ τέμνονται μόνο στο σημείο Ο (0,0) (αφού $f(0) = f'(0) = 0$).

Comment [D77]: 1,5Μ

Το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και −f΄ και την ευθεία $x = \dfrac{\pi}{2}$ είναι (λόγω της σχέσης (III) έχουμε $|\eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x + x\eta\mu x| = \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x + x\eta\mu x$ για κάθε $x \in \left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$):

Comment [D78]: 1 Μ

$$\mathrm{E}(\Omega)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|f(x)-f'(x)|dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x+x\eta\mu x|dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x+x\eta\mu x)dx=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\eta\mu x dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sigma\upsilon\nu x dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\eta\mu x dx=I_1-I_2+I_3 \quad (1)$$

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\eta\mu x dx=[-\sigma\upsilon\nu x]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$$

$$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sigma\upsilon\nu x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x(\eta\mu x)'dx=[x\eta\mu x]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\eta\mu x dx=\frac{\pi}{2}+[\sigma\upsilon\nu x]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-1$$

$$I_3=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\eta\mu x dx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}x(\sigma\upsilon\nu x)'dx=-[x\sigma\upsilon\nu x]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu x dx=[\eta\mu x]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$$

Άρα: $\mathrm{E}(\Omega)=1-\left(\frac{\pi}{2}-1\right)+1=3-\frac{\pi}{2}\ \tau.\mu.$

Comment [D79]: 2,5 Μ (Αναλογική κατανομή στα Ι1,Ι2,Ι3)

<u>Εναλλακτικά για το μοναδικό σημείο τομής έχουμε:</u>

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f,\ -f'$ τέμνονται μόνο στο σημείο $\mathrm{O}\,(0,0)$ αφού :

$$f(x)=-f'(x)\Leftrightarrow \eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x=-x\eta\mu x\Leftrightarrow \eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x+x\eta\mu x=0 \quad (1)$$

Προφανώς για $x=0$ η (1) επαληθεύεται, δηλαδή οι $f,\ -f'$ τέμνονται στο $\mathrm{O}\,(0,0)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\mathrm{K}(x)=\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x+x\eta\mu x,\ x\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$(ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$) με $\mathrm{K}'(x)=x\eta\mu x+\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x>0$ για κάθε $x\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ και επειδή η K είναι συνεχής στο $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ θα είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$, άρα και «1-1» και επομένως η $x=0$ είναι η μοναδική ρίζα της (1). Άρα οι $f,\ -f'$ τέμνονται μόνο στο σημείο $\mathrm{O}\,(0,0)$.

ΕΡΩΤΗΜΑ	Δ1		Δ2	Δ3		Δ4	
ΜΟΝΑΔΕΣ	I.	II.		I.	II.	I.	II.
ΣΥΝΟΛΑ							
ΓΕΝΙΚΟ ΣΥΝΟΛΟ							

ΣΥΝΟΛΙΚΟΣ ΒΑΘΜΟΣ:	

Επιστημονική επιμέλεια:
Καραγιάννης Ιωάννης, Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών
Ρουμελιώτης Αντώνης, Καθηγητής Μαθηματικών