2ο Προσομοιωτικό Διαγώνισμα Γ΄ Λυκείου Κατεύθυνσης

Επιστημονική Επιμέλεια θεμάτων:
Καραγιάννης Ιωάννης, Σχολικός Σύμβουλος Ν. Δωδεκανήσου
Συντακτική ομάδα θεμάτων: Μαλλιάκας Κώστας, Μαρτάκης Μάρτης
Καθηγητές 1ου ΓΕ.Λ. Ρόδου

Επιμέλεια λύσεων: Χατζόπουλος Μάκης

Α΄Εκδοση: *Ρόδος – Αθήνα 30/4/2013*

Θέμα Α

Α1. Θεωρία σχ. βιβλίο σελ. 334 - 335

Α2. Θεωρία σχ. βιβλίο σελ. 280

Α3. Θεωρία σχ. βιβλίο σελ. 154 (9η πρώτη παράγραφος της αντίστοιχης σελίδας)

Α4.

α) Σ

β) Σ

γ) Λ

(δεν ισχύει το αντίστροφο του Θ. Fermat, πχ. η $f(x)=x^3$ *δίνει* $f'(0)=0$ *παρόλα αυτά το σημείο* $x_0=0$ *όπως είναι γνωστό από γραφική παράσταση δεν είναι ακρότατο της f)*

δ) Σ

ε) Λ

(πχ. $\int_{-1}^{2} 2x\,dx = \left[x^2\right]_{-1}^{2} = 2^2-(-1)^2 = 3 > 0$ *παρόλα αυτά η* $f(x)=2x$ *δεν είναι θετική για κάθε* $x\in[-1,2]$ *)*

Θέμα Β

Β1) Θέτουμε: $h(x)=f(x)-g(x),\ x\in[0,2]$

- η h είναι συνεχής [0, 2] ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων
- $h(0)=f(0)-g(0)=e-(25+1)<0$
- $h(2)=f(2)-g(2)=(2+e)\ln(2+e)-\left(5^2+\frac{1}{9}\right)=(2+e)\ln(2+e)-\frac{10}{9}$

Θα δείξουμε ότι: $h(2)>0$

$$h(2)>0 \Leftrightarrow (2+e)\ln(2+e)-\frac{10}{9}>0 \Leftrightarrow (2+e)\ln(2+e)>\frac{10}{9} \Leftrightarrow (2+e)^{(2+e)}>e^{\frac{10}{9}}$$

που ισχύει αφού $2+e>\frac{10}{9}>1$ και $2+e>e>1$

άρα $h(0)\cdot h(2)<0$, από το Θεώρημα Bolzano παίρνουμε ότι η εξίσωση $h(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,2)$.

Θα δείξουμε ότι είναι μοναδική

Για κάθε $x\in(0,2)$ έχουμε,

$h'(x) = f'(x) - g'(x) = \ln(x+e) + 1 - \left(-5^{2-x}\ln 5 - 3^{-x}\ln 3\right)$

$= \underbrace{\ln(x+e)}_{+} + \underbrace{1 + 5^{2-x}\ln 5 + 3^{-x}\ln 3}_{+} > 0$

γιατί $0 < x < 2 \Leftrightarrow e < x + e < 2 + e \Leftrightarrow \ln e < \ln(x+e) < \ln(2+e) \Leftrightarrow 1 < \ln(x+e)$

οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα στο [0, 2], άρα η λύση της εξίσωσης h(x) =0 είναι μοναδική στο (0, 2).

Σημείωση: Η εξίσωση f(x) =g(x) έχει μοναδική λύση στο $D_f \bigcap D_g = (-e, +\infty)$.

Β2) Για κάθε $x \in (-e, +\infty)$ έχουμε,

$$f'(x) = \ln(x+e) + 1 \;\; \textit{και} \;\; f''(x) = \frac{1}{x+e} > 0$$

άρα η f είναι κυρτή στο $(-e, +\infty)$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε,

$$g'(x) = -5^{2-x}\ln 5 - 3^{-x}\ln 3 \;\; \textit{και} \;\; g'(x) = 5^{2-x}\cdot\ln^2 5 + 3^{-x}\cdot\ln^2 3 > 0$$

άρα η g είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Β3) Θα δείξουμε ότι: $g(2013) < \dfrac{g(2012) + g(2014)}{2}$

Έχουμε διαδοχικά,

$$g(2013) < \frac{g(2012) + g(2014)}{2} \Leftrightarrow 2 \cdot g(2013) < g(2012) + g(2014)$$

$$\Leftrightarrow g(2013) - g(2012) < g(2014) - g(2013)$$

$$\Leftrightarrow \frac{g(2013) - g(2012)}{2013 - 2012} < \frac{g(2014) - g(2013)}{2014 - 2013}$$

*(ικανοποιείται το **Θεώρημα Μέσης Τιμής** για την g στα διαστήματα* $[2012, 2013]$, $[2013, 2014]$, *άρα υπάρχουν* $\xi_1 \in (2012, 2013)$, $\xi_2 \in (2013, 2014)$ *τέτοια ώστε)*

$\Leftrightarrow g'(\xi_1) < g'(\xi_2)$

$\overset{g':<}{\Leftrightarrow} \xi_1 < \xi_2$ *που ισχύει*

B4) Εύρεση πεδίο ορισμού της fog

$$D_{fog}=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,5^{2-x}+\left(\frac{1}{3}\right)^{x}\in(-e,+\infty)\right\}=\mathbb{R},\ \text{αφού}\ 5^{2-x}+\left(\frac{1}{3}\right)^{x}>0>-e$$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε,

$$(fog)(x)=f(g(x))=(g(x)+e)\ln(g(x)+e)$$

- Η $g(x)+e$ είναι θετική και η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, αφού $g'(x)=-5^{2-x}\ln 5-3^{-x}\ln 3<0$, άρα, $x_1<x_2\Rightarrow g(x_1)>g(x_2)\Rightarrow g(x_1)+e>g(x_2)+e\ \ (1)$
- Η $\ln(g(x)+e)$ είναι θετική και γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, αφού $x_1<x_2\Rightarrow g(x_1)>g(x_2)\Rightarrow g(x_1)+e>g(x_2)+e\Rightarrow \ln(g(x_1)+e)>\ln(g(x_2)+e)\ \ (2)$

Άρα με πολ/σμό κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) παίρνουμε:

$$(g(x_1)+e)\ln(g(x_1)+e)>(g(x_2)+e)\ln(g(x_2)+e)\Rightarrow(fog)(x_1)>(fog)(x_2)$$

δηλαδή η fog είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ άρα και ένα προς ένα.

Β΄ τρόπος: Έχουμε,

$$(fog)'(x)=\left(f(g(x))\right)'=f'(g(x))\cdot g'(x)=\underbrace{(\ln(g(x)+e)+1)}_{+}\cdot\underbrace{g'(x)}_{-}<0$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

__**Εύρεση συνόλου τιμών της fog**__

$$\lim_{x\to-\infty}(fog)(x)=\lim_{x\to-\infty}f(g(x))$$

$$=\left(\begin{array}{l}\text{Θέτω}: u=g(x)\\ u_0=\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(5^{2-x}+3^{-x}\right)=+\infty\end{array}\right)=\lim_{u\to+\infty}f(u)=\lim_{u\to+\infty}(u+e)\ln(u+e)=+\infty$$

Επίσης,

$$\lim_{x\to+\infty}(fog)(x)=\lim_{x\to+\infty}f(g(x))$$

$$=\left(\begin{array}{l}\text{Θέτω}: u=g(x)\\ u_0=\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(5^{2-x}+3^{-x}\right)=0\end{array}\right)=\lim_{u\to0}f(u)=\lim_{u\to0}(u+e)\ln(u+e)=e$$

όμως η fog είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, άρα το σύνολο τιμών της είναι,

$$(f\circ g)(\mathbb{R})=(e,+\infty)$$

B΄ τρόπος: *Θα μπορούσαμε να είχαμε βρεις εξ' αρχής την συνάρτηση*

$$(f\circ g)(x)=\left(5^{2-x}+3^{-x}+e\right)\ln\left(5^{2-x}+3^{-x}+e\right)$$

και να την μελετήσουμε ως προς την μονοτονία και το σύνολο τιμών της…

ΘΕΜΑ Γ

Γ1) Παρατηρούμε ότι,

$$\left(\lambda^3-\mu\lambda^5+\mu i\right)^2+\left[(\lambda i)^3+\mu(\lambda i)^5+\mu\right]^2=\left(\lambda^3-\mu\lambda^5+\mu i\right)^2+\left(-\lambda^3 i+\mu\lambda^5 i+\mu\right)^2$$

$$=\left(\lambda^3-\mu\lambda^5+\mu i\right)^2+\left(-\lambda^3 i+\mu\lambda^5 i-\mu\cdot i^2\right)^2$$

$$=\left(\lambda^3-\mu\lambda^5+\mu i\right)^2+(-i)^2\cdot\left(\lambda^3-\mu\lambda^5+\mu i\right)^2$$

$$=\left(\lambda^3-\mu\lambda^5+\mu i\right)^2-\left(\lambda^3-\mu\lambda^5+\mu i\right)^2=0$$

άρα $|z|^{|w|}-|w|^{|z|}=0\Leftrightarrow|z|^{|w|}=|w|^{|z|}\Leftrightarrow\left(|w|^3\right)^{|w|}=|w|^{|w|^3}\Leftrightarrow|w|^{3\cdot|w|}=|w|^{|w|^3}\Leftrightarrow 3|w|=|w|^3$

$\Leftrightarrow|w|\left(3-|w|^2\right)=0\Leftrightarrow\left\{|w|=0\ \text{ή}\ |w|=\sqrt{3}\right\}$

Αν $|w|=0$ τότε $|z|=|w|^3=0$ άτοπο, αφού $|z|\neq|w|$.Οπότε $|w|=\sqrt{3}$, οι εικόνες του μιγαδικού w κινούνται στο μιγαδικό επίπεδο σε κύκλο C_1 με κέντρο O(0, 0) και ακτίνα $\rho_1=\sqrt{3}$.

Επίσης, $|z|=|w|^3\Rightarrow|z|=\sqrt{3}^3\Rightarrow|z|=\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\Rightarrow|z|=3\sqrt{3}$ οι εικόνες του μιγαδικού z κινούνται στο μιγαδικό επίπεδο σε ομόκεντρο κύκλο με τον C_1, στον C_2 και ακτίνα $\rho_2=3\sqrt{3}$.

Γ2) Έχουμε,

$$K=\left(1+\frac{|z|+|w|i}{|w|-|z|i}\right)^{2\nu}=\left(1+\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-3\sqrt{3}i}\right)^{2\nu}=\left(1+\frac{3+i}{1-3i}\right)^{2\nu}$$

$$=\left(1+\frac{(3+i)(1+3i)}{1+9}\right)^{2\nu}=\left(1+\frac{10i}{10}\right)^{2\nu}=(1+i)^{2\nu}=\left[(1+i)^2\right]^{\nu}=2^{\nu}\cdot i^{\nu}$$

Διαιρούμε τον φυσικό αριθμό ν με το 4, τότε ανάλογα με το υπόλοιπο της διαίρεσης έχουμε τα εξής αποτελέσματα: $K=\begin{cases} 2^{\nu} & ,\upsilon=0 \\ 2^{\nu}\cdot i & ,\upsilon=1 \\ -2^{\nu} & ,\upsilon=2 \\ -2^{\nu}\cdot i & ,\upsilon=3 \end{cases}$

Γ3) Έχουμε, $|u|=|u-2\sqrt{3}|$, αναζητούμε το $|u|_{min}$. Ο γεωμετρικός τόπο των εικόνων του u στο μιγαδικό επίπεδο είναι η μεσοκάθετος του ΟΔ, όπου $O(0,0)$, $\Delta(2\sqrt{3},0)$, η εξίσωση $x=\sqrt{3}$.

Το σημείο της ευθείας $x=\sqrt{3}$ που απέχει ελάχιστη απόσταση από την αρχή των αξόνων είναι το σημείο $A(\sqrt{3},0)$ (από το σημείο Ο φέρνουμε ευθεία κάθετη στην κατακόρυφη ευθεία $x=\sqrt{3}$) που ανήκει στον κύκλο $C_1: x^2+y^2=\sqrt{3}^2$.

Γ4) Έστω $B(w_1)$ η εικόνα που ανήκει στον κύκλο C_1, τότε η εικόνα του μιγαδικού $-w_1$ είναι συμμετρική ως προς το κέντρο του κύκλου $O(0,0)$, άρα το $\Gamma(-w_1)$ είναι το αντιδιαμετρικό σημείο του $B(w_1)$.

Επομένως το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο, αφού η γωνία Α είναι εγγραμμένη γωνία που βαίνει στο ημικύκλιο.

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1) Έχουμε $h(x)=2x+\sigma\upsilon\nu x,\ x\in\mathbb{R}$, άρα $h'(x)=2-\eta\mu x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και

άρα $h''(x)=-\sigma\upsilon\nu x<0$ *για κάθε* $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

$$\Rightarrow \int_0^{f(x)} h'(t)dt=h(e^x)-h(0)$$

$$\Rightarrow h(f(x))-h(0)=h(e^x)-h(0)$$

$$\Rightarrow h(f(x))=h(e^x)$$

$$\overset{h:1-1}{\Rightarrow} f(x)=e^x,\ x\in\mathbb{R}$$

Εύρεση τύπου της συνάρτησης g

Για κάθε $x\in[0,1]$ έχουμε,

$$e^2+2\int_0^1 g^2(x)\,dx=1+4\cdot\int_0^1 e^x\cdot g(x)\,dx\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot\int_0^1\left(g^2(x)-2e^x g(x)\right)dx+\underbrace{e^2-1}_{=2\int_0^1 e^{2x}\,dx}=0$$

$$2\cdot\int_0^1\left(g^2(x)-2e^x g(x)\right)dx+2\int_0^1 e^{2x}\,dx=0$$

$$\Rightarrow\int_0^1\left(g^2(x)-2e^x g(x)+e^{2x}\right)dx=0$$

$$\Rightarrow\int_0^1\left(g(x)-e^x\right)^2\,dx=0$$

$$\Rightarrow g(x)-e^x=0\Rightarrow g(x)=e^x\ \ \textit{για κάθε}\ x\in[0,1]$$

Οπότε $g(x)=\begin{cases}x+1 & ,x<0\\ e^x & ,x\geq 0\end{cases}$ άρα $f(x)=g(x)$, *για κάθε* $x\in[0,+\infty)$.

Δ3) Θέτουμε. $k(x)=f(x)-h(x)=e^x-2x-\sigma\upsilon\nu x,\quad x\in[2,3]$

Παρατηρούμε ότι $k(0)=0$ (οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, h τέμνονται στο (0, 1)), θα δείξουμε ότι η ρίζα είναι μοναδική στο $[2,3]$.

Έχουμε, $k'(x)=e^x-2+\eta\mu x$, όμως το διάστημα $[2,3]\subseteq\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ άρα $\eta\mu x>0$ *για κάθε* $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$

όμως $x>2\Rightarrow e^x>e^2>2\Rightarrow e^x-2>0$ επομένως. $k'(x)=e^x-2+\eta\mu x>0$ *για κάθε* $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$

Επίσης, $k(2)=e^2-4-\sigma\upsilon\nu 2>0$, αφού $2\in\left(\frac{\text{⑦}}{2},\text{⑦}\right)$ και $e>2\Rightarrow e^2>4\Rightarrow e^2-4>0$, άρα

$$2<x\Rightarrow k(2)<k(x)\Rightarrow 0<k(x),\ \textit{για κάθε}\ x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$$

Επομένως,

$$E(\Omega)=\int_2^3 \left|k(x)\right| dx=\int_2^3 k(x)\,dx=\int_2^3 \big(f(x)-h(x)\big)\,dx=\left[e^x-x^2-\eta\mu x\right]_2^3=e^3-e^2-5-\eta\mu 3+\eta\mu 2$$

Δ4) Θέτουμε $p(x)=\dfrac{h(x)}{x}=2+\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x},\ x\in\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right]$, για κάθε $\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right)$ έχουμε,

$$p'(x)=\frac{-x\cdot\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x}{x^2}=\frac{-\left(x\cdot\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x\right)}{x^2}<0$$

άρα η p είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Επίσης,

$$-\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{\pi}{2}\overset{p:>}{\Rightarrow}p\left(\frac{\pi}{2}\right)\le p(x)\le p\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow 2+0\le p(x)\le 2+\frac{3}{2\pi}$$

$$\Rightarrow 2\le\frac{h(x)}{x}\le 2+\frac{3}{2\pi}$$

$$\Rightarrow\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 2\,dx\le\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{h(x)}{x}\,dx\le\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\left(2+\frac{3}{2\pi}\right)dx$$

$$\Rightarrow 2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)\le\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{h(x)}{x}\,dx\le\left(2+\frac{3}{2\pi}\right)\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow 1<\frac{\pi}{3}\le\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{h(x)}{x}\,dx\le\frac{4\pi+3}{12}<2$$